

Sada domácich úloh z UKTG č. 3

Termín: štvrtok 12. 5. 2022, 23:59

Úloha 1. (3 body) V závislosti od nezáporných celých čísel c, s určte, koľko existuje c -ciferných čísel s ciferným súčtom s . Výsledok môžete uviesť v tvare jednej sumy.

Poznámka. Ak sa Vám úloha zdá ťažká, odporúčam vyskúšať si ju vyriešiť pre malé konkrétne hodnoty c, s . Vhodnými kandidátmi na začiatok sú napr. $c = 5, s = 8$ a $c = 7, s = 24$.

Úloha 2. (2 body) Uvažujme funkciu $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ danú predpisom

$$f(n) = \frac{1}{5n} - \frac{3}{n^2}.$$

Rozhodnite, či platí

- a) $f(n) = \Theta(n^{-1})$,
- b) $f(n) = \Theta(n^{-2})$,
- c) $f(n) = o(n^{-2})$,
- d) $f(n) = \omega(n^{-2})$.

Všetky vaše tvrdenia formálne dokážte. Vychádzajte pri tom len z definícií (čiže bez odvolávania sa na tvrdenia o asymptotike z prednášky či cvičení). Nech neriešite problémy s $n = 0$ v definíciách z prednášky môžete nahradiť \mathbb{N} bez problémov za \mathbb{N}^+ .

Úloha 3. (2 body) Na večierku sa stretlo $3n - 1$ ľudí, $n \in \mathbb{N}^+$. Niektoré dvojice ľudí sa medzi sebou poznajú (vzťah poznať sa je symetrický). Dokážte, že v každej takejto situácii existuje n navzájom disjunktných párov s vlastnosťou, že buď sa všetky páry medzi sebou poznajú, alebo sa žiaden z párov medzi sebou nepozná.