

# Semestrálna písomka z UKTG

7. 4. 2021

**Úloha 1.** (4 body) Na šachovnicu ľubovoľne rozmiestnime 17 strelcov. Dokážte, že vždy je možné spomedzi nich vybrať troch strelcov, medzi ktorými sa nebudú žiadni dvaja ohrozovať, a to aj potom, čo nevybraných strelcov odstránime zo šachovnice.

**Úloha 2.** (1 + 2 + 2 + 3 = 8 bodov) Anglickým slovom nazývame ľubovoľnú konečnú postupnosť prvkov 26-prvkovej množiny písmen  $\{a, b, \dots, z\}$ . Určte, koľko je

- anglických slov dĺžky 10, v ktorých sa neopakujú písmená;
- anglických slov dĺžky 17, ktoré obsahujú práve 8 písmen  $a$ ;
- anglických slov dĺžky 12, ktoré obsahujú aspoň jedno písmeno  $q$ ;
- anglických slov dĺžky 20, ktoré obsahujú práve dve (rôzne) písmená presne 8-krát (príkladom takého slova je  $aaaabaaaabbbbbbcdee$ ).

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite. Pre získanie plného počtu bodov treba výsledok uviesť v uzavretom tvare, teda bez súm, troch bodiek a podobne. Vyčíslovať výsledky nemusíte.

**Úloha 3.** (4 body) Dokážte, že pre každé kladné celé čísla  $n, k$  platí

$$\frac{1}{2} \binom{n}{k} \binom{n-k}{k} = \binom{n}{2k} \binom{2k-1}{k}.$$

**Úloha 4.** (4 body) Vypočítajte sumu

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} (n-k) \binom{n}{k} 3^k.$$