Semestrálna písomka z UKTG

7. 4. 2021

Úloha 1. *(4 body)* Na šachovnicu ľubovoľne rozmiestnime 17 strelcov. Dokážte, že vždy je možné spomedzi nich vybrať troch strelcov, medzi ktorými sa nebudú žiadni dvaja ohrozovať, a to aj potom, čo nevybraných strelcov odstránime zo šachovnice.

Riešenie. Šachovnica má 8 stĺpcov. Keďže $17/8 > 2$, tak z frekvenčnej formy Dirichletovho princípu existuje stĺpec, v ktorom sú aspoň traja strelci. Títo traja strelci sa navzájom neohrozujú. □

Úloha 2. *(1 + 2 + 2 + 3 = 8 bodov) Anglickým slovom* nazývame ľubovoľnú konečnú postupnosť prvkov 26-prvkovej množiny písmen $\{a, b, \dots, z\}$. Určte, koľko je

a) anglických slov dĺžky 10, v ktorých sa neopakujú písmená;

b) anglických slov dĺžky 17, ktoré obsahuhú práve 8 písmen a;

c) anglickcýh slov dĺžky 12, ktoré obsahujú aspoň jedno písmeno q;

d) anglických slov dĺžky 20, ktoré obsahujú práve dve (rôzne) písmená presne 8-krát (príkladom takého slova je *aaaabaaaabbbbbbbcdee*).

Vaše tvrdenia neformálne zdôvodnite. Pre získanie plného počtu bodov treba výsledok uviesť v uzavretom tvare, teda bez súm, troch bodiek a podobne. Vyčíslovať výsledky nemusíte.

Riešenie.

a) $26^{\underline{10}}$: Ide o variácie 10-triedy z 26 prvkov.

b) $\binom{17}{8} \cdot 25^9$: Najskôr vyberieme zo 17 možných pozícií 8 pozícií, na ktoré umiestnime písmená a. Ostane nám potom (zakaždým) 9 pozícií, na ktoré môžeme umiestniť ľubovoľné z 25 písmen, čo vieme spraviť 25^9 spôsobmi.

c) $26^{12} - 25^{12}$: Všetkých anglických slov dĺžky 12 je 26^{12}. Tých, ktoré neobsahujú písmeno q, je 25^{12}, lebo vyberáme si len z 25 písmen. Slová s aspoň jedným q tvoria k nim doplnok.

d) $\binom{26}{2}\binom{20}{8}\binom{12}{8} \cdot 24^4$. Najskôr si vyberieme (neusporiadanú) dvojicu písmen, ktoré sa budú v našom slove vyskytovať 8-krát – to vieme spraviť $\binom{26}{2}$ spôsobmi. Potom vyberieme, na ktorých miestach sa bude nachádzať prvé z nich (napr. to skôr v abecede) – vyberáme z 20 pozícií 8, teda $\binom{20}{8}$ spôsobov. Podobne vyberieme pozície pre druhé písmeno – $\binom{12}{8}$. Ostanú nám tak 4 nevybrané pozície, na ktorých môže byť ľubovoľné písmeno okrem dvoch už vyberaných – 24^4 možností.

□

Úloha 3. *(4 body)* Dokážte, že pre každé kladné celé čísla n, k platí

$$\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} = \binom{n}{2k}\binom{2k-1}{k}.$$

Riešenie cez algebraické úpravy. Dokazovanú rovnosť ekvivalentne upravíme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} &= \binom{n}{2k}\binom{2k-1}{k} \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} &= \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} \cdot \frac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} \\
\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(2k)!} \cdot \frac{(2k-1)!}{(k-1)!} \\
\frac{1}{2} &= \frac{k}{2k} \\
1 &= 1
\end{aligned}$$

□

Kombinatorický dôkaz. Spočítajme počet spôsobov, ako možno spomedzi n detí s číslami $M = \{1, 2, \dots, n\}$ vybrať neusporiadanú dvojicu $\{X, Y\}$ disjunktných k-členných tímov (teda $X \cap Y = \emptyset$ a $X, Y \in \binom{M}{k}$).

Uvažujeme najprv rozlíšiteľné tímy. Prvý tím X ($X \in \binom{M}{k}$) možno vybrať $\binom{n}{k}$ spôsobmi. Potom druhý tím Y možno vždy vybrať $\binom{n-k}{k}$ spôsobmi ($Y \in \binom{M-X}{k}$). Nám však na poradí tímov nezáleží, a tak sme každú možnosť započítali dvakrát. Preto po predelení dvomi dostaneme, že všetkých možností je

$$\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}.$$

Vyberme najskôr množinu $Z \in \binom{M}{2k}$, ktorá bude $2k$ detí, z ktorých vyberieme tímy X a Y. Oznčme m dieťa zo Z s najmenším číslom. Rozdelenie vybraných $2k$ detí na nerozlíšiteľné tímy je jednoznačne určené výberom k detí, ktoré sa nenachádzajú v tíme s dieťaťom m, čo je možné $\binom{2k-1}{k}$ spôsobmi. Spolu teda máme počet možností

$$\binom{n}{2k}\binom{2k-1}{k}.$$

Formálnejšie (hoci, to nebolo až takto potrebné), zvolíme $Z \in \binom{M}{2k}$, pričom si označíme najmenší prvok množiny Z ako m a potom zvolíme $X \in \binom{Z-\{m\}}{k}$. Počet takýchto výberov (Z, X) je vždy $|\binom{Z-\{m\}}{k}| = \binom{2k-1}{k}$. Ľahko sa presvedčíme, že zobrazenie, ktoré dvojici (Z, X) priradí množinu $\{X, \{m\} \cup (Z - X)\}$ je bijekcia. Preto počet hľadaných rozdelení $\{X, Y\}$ je podľa zovšeobecneného pravidla súčinu $\binom{n}{2k}\binom{2k-1}{k}$. □

Úloha 4. *(4 body)* Vypočítejte sumu

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}(n-k)\binom{n}{k}3^k.$$

Riešenie úpravovu vyrazou.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}}(n-k)\binom{n}{k}3^k &= \sum_{k\in\mathbb{N}}(n-k)\frac{n!}{k!(n-k)!}3^k = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}3^k = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} n \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}3^k = \\
&= n \cdot \sum_{k\in\mathbb{N}}\binom{n-1}{k}3^k = \qquad\qquad | \text{ použijeme binomickú vetu} \\
&= n \cdot 4^{n-1}
\end{aligned}$$

□

Kombinatorické riešenie. Uvažujme množinu M všetkých n-prvkové postupnosti zložené z písmen $\{A, a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jedno A. Poďme vypočítať, ktoľko takých postupností je. Rozdeľme si ich na skupinky: do množiny M_k dáme tie postupnosti, ktoré obsahujú práve k spoluhlások (teda písmen z množiny $\{b, c, d\}$). Koľko ich je? Najskôr vyberieme $\binom{n}{k}$ spôsobmi k miest, na ktorých budú spoluhlásky. Pre každé z týchto k miest máme 3 možnosti, ktorú spoluhlásku tam môžeme dať – 3^k možností. Ostano nám $n - k$ miest. Na jedno z nich dáme A, čo môžeme vybrať $n - k$ spôsobmi. Na zvyšné miesta dáme písmená a. Postupností v množine M_k je teda $(n-k)\binom{n}{k}3^k$. Podľa pravidla súčtu je všetkých postupností

$$|M| = |\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k| = \sum_{k\in\mathbb{N}}|M_k| = \sum_{k\in\mathbb{N}}(n-k)\binom{n}{k}3^k.$$

Počet takýchto postupností možno však vypočítať aj jednoduchšie. Najprv si vyberime jedno z n miest, kam dáme A a na zvyšné miesta nám ostane 4^{n-1} možností. Preto je daná suma rovná $n \cdot 4^{n-1}$ □