Cvičenie 1: Matematická indukcia

Základná forma matematickej indukcie

> *Princíp matematickej indukcie:* nech $X \subseteq \mathbb{N}$ je množina prirodzených čísel taká, že:
>
> (i) $0 \in X$.
>
> (ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak $n \in X$, tak $n + 1 \in X$.
>
> Potom $X = \mathbb{N}$.
>
> V prípade, že máme danú postupnosť výrokov $(V(n))_{n\in\mathbb{N}}$, môžeme za X zvoliť množinu tých $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré je výrok $V(n)$ pravdivý. Ako priamy dôsledok princípu matematickej indukcie tak dostávame nasledujúcu vetu:
>
> **Veta 1.** *Nech $(V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť výrokov taká, že*
>
> (i) *Výrok $V(0)$ je pravdivý.*
>
> (ii) *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.*
>
> *Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$.*
>
> Tvrdenie (i) predchádzajúcej vety sa nazýva *báza indukcie* a tvrdenie (ii) sa nazýva *indukčný krok.*
>
> Princíp matematickej indukcie nemožno dokázať – ide o jednu z tzv. *Peanových axióm*, ktorá je ale ekvivalentná inému pomerne očividnému tvrdeniu, tzv. *vlastnosti dobrého usporiadania množiny* $\mathbb{N}$ (viď nižšie). Je teda možné chápať princíp matematickej indukcie ako axiómu a vlastnosť dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ ako dôsledok tejto axiómy, alebo naopak.
>
> Často sa stáva, že tvrdenie platí (alebo dáva zmysel) iba pre prirodzené čísla n väčšie alebo rovné ako nejaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Pomocou princípu matematickej indukcie ale možno ľahko dokázať platnosť nasledujúceho variantu vety 1:
>
> **Veta 2.** *Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n\geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že*
>
> (i) *Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.*
>
> (ii) *Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak je pravdivý výrok $V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.*
>
> *Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.*

→ **Úloha 1.** Dokážte vetu 2 (s použitím princípu matematickej indukcie).

→ **Úloha 2.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $3 \mid n^3 + 2n$.

Úloha 3. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $5 \mid n^5 - n$.

Úloha 4 (Malá Fermatova veta)**.** (*) Dokážte, že pre všetky prvočísla p a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $p \mid n^p - n$.

→ **Úloha 5.** Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}^+$ platí $31 \mid 5^{n+1} + 6^{2n-1}$.

Úloha 6. (*) Dokážte, že pre všetky $n,\ k \in \mathbb{N}$ platí $n^2 + n + 1 \mid n^{k+2} + (n + 1)^{2k+1}$.

→ **Úloha 7.** Nech $A \subseteq \mathbb{N}$ je ľubovoľná konečná množina prirodzených čísel, pre ktorú platí $|A| = n$. Označme

$$S(A) = \{x + y \mid x \in A;\ y \in A\}.$$

Dokážte, že $|S(A)| \geq 2n - 1$.

Úloha 8. (*) Nech $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sú ľubovoľné konečné množiny prirodzených čísel také, že $|A| = m \geq 1$ a $|B| = n \geq 1$. Označme

$$A + B = \{a + b \mid a \in A;\ b \in B\}.$$

Dokážte, že potom

$$|A + B| \geq m + n - 1$$

a ukážte, že tento dolný odhad je tesný[1] pre všetky $m, n \geq 1$.

Úloha 9. [Riešenie] Dokážte, že pre ľubovoľných n kladných reálnych čísel $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ so súčinom 1 platí

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

[1] K ľubovoľnej dvojici prirodzených čísel $m, n \geq 1$ teda existujú konečné množiny $A, B \subseteq \mathbb{N}$ také, že $|A| = m$, $|B| = n$ a $|A+B| = n+m-1$.

Úloha 10 (Nerovnosť medzi aritmetickým a geometrickým priemerom)**.** (*) Dokážte, že pre ľubovoľných n nezáporných reálnych čísel x_1, x_2, $\ldots, x_n$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Úloha 11. Z teórie čísel vieme, že $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(a, a-b)$. Dokážte, že potom platí aj $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(a, a \bmod b)$.

Silná matematická indukcia

Pri dôkaze indukčného kroku sa pri „bežnej“ matematickej indukcii (podľa vety 1 resp. vety 2) odvodzuje platnosť výroku $V(n+1)$ len na základe predpokladu platnosti výroku $V(n)$ – tento predpoklad nazývame *indukčným predpokladom.* Formálne sa teda nemožno odvolávať na platnosť výrokov $V(j)$ pre $j < n$; indukčným predpokladom je iba platnosť výroku $V(n)$.

Ľahko možno nahliadnuť, že ide o umelé a čisto formálne obmedzenie. Ak totiž v báze indukcie dokážeme platnosť výroku $V(n_0)$ a následne dokážeme indukčný krok pre $n = n_0, \ldots, k-1$, ľahko vidieť, že sú pravdivé *všetky* výroky $V(n_0), V(n_0 + 1), \ldots, V(k)$. Pri dôkaze indukčného kroku pre $n = k$ sa teda môžeme odvolávať aj na platnosť výrokov $V(j)$ pre $n_0 \leq j < k$: ľahko možno dokázať, že záver vety 2 – čiže pravdivosť výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$ – bude aj v tomto prípade zaručený. Túto myšlienku možno sformalizovať nasledovne:

Veta 3. *Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$ je postupnosť výrokov taká, že*

(i) Výrok $V(n_0)$ je pravdivý.

(ii) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$ platí: ak sú pravdivé výroky $V(n_0), V(n_0 + 1), \ldots, V(n)$, tak je pravdivý aj výrok $V(n + 1)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

Veta 3 sa niekedy nazýva *princípom úplnej matematickej indukcie*, prípadne *princípom silnej matematickej indukcie.* Ak si navyše uvedomíme, že bod (i) vieme dostať z bodu (ii) dosadením $n = n_0 - 1$ a vhodne posunieme indexy, tak vieme sformulovať princíp silnej matematickej indukcie aj v jednom kroku.

Veta 4. *Nech $n_0 \in \mathbb{N}$ a $(V(n))_{n \geq n_0}$. Nech pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$, platí implikácia:*

Ak je výrok $V(k)$ pravdivý pre každé $k \in \mathbb{N}$ menšie ako n, tak je pravdivý aj výrok $V(n)$.

Potom je výrok $V(n)$ pravdivý pre všetky $n \in \mathbb{N}$ také, že $n \geq n_0$.

V tejto vete pre $n = n_0$ dostaneme implikáciu: „Ak pravda, tak je pravdivý výrok $V(n_0)$.“ Ten má rovnakú pravdivostnú hodnotu ako $V(n_0)$.

V tejto súvislosti treba upozorniť na skutočnosť, že predovšetkým vo filozofickej logike sa niekedy používa pojem úplnej indukcie vo vzťahu k tzv. neúplnej indukcii; tá v matematike nemá miesto, no často sa používa v empirických vedách (z 1000 neúspešných pokusov o prerazenie hlavy múrom napríklad môže empirická veda trochu neuvážene usúdiť, že to nie je možné; o matematický dôkaz ale nejde). Podľa tejto terminológie je matematická indukcia *vždy* úplná, hoci nejde o úplnú matematickú indukciu v zmysle zavedenom vyššie.

Úloha 12. Dokážte vetu 3 (s použitím vety 2).
Nápoveda: nech $V'(n) := V(n_0) \wedge V(n_0 + 1) \wedge \ldots \wedge V(n)$, potom...

→ **Úloha 13.** Dokážte, že každé prirodzené číslo $n \geq 2$ možno rozložiť na súčin prvočísel.

→ **Úloha 14.** Pod *rozlomením* obdĺžnikovej tabuľky čokolády rozumieme jej rozdelenie (pozdĺž priamky, ktorá prechádza hranami medzi štvorčekmi) na dve obdĺžnikové tabuľky, ktoré dohromady obsahujú rovnaký počet štvorčekov ako pôvodná tabuľka. Dokážte, že každú obdĺžnikovú tabuľku čokolády o $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ štvorčekoch možno rozdeliť na jednotlivé štvorčeky pomocou $n - 1$ rozlomení.

Úloha 15. (*) Dokážte predošlé tvrdenie bez použitia matematickej indukcie

Úloha 16. Z teórie čísel vieme, že pre všetky celé čísla a, b platí $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b - a, a)$ (tvrdenie nemusíte dokazovať). Dokážte, že pre všetky celé čísla a, b platí $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b \bmod a, a)$

→ **Úloha 17.** Máme daný konvexný n-uholník, kde n je celé číslo a $n \geq 3$. Pomocou niekoľkých priamok ho rozdelíme na samé trojuholníky. Dokážte, že po tomto procese dostaneme určite aspoň $n - 2$ trojuholníkov. [Riešenie]

Poznámka. Mnohouholník M je *konvexný*, ak pre každú dvojicu bodov X, Y (či už z obvodu alebo z vnútra) mnohouholník M obsahuje celú úsečku XY. Ekvivalentne sa dá povedať, že mnohouholník je konvexný, ak všetky jeho vnútorné uhly sú menšie ako 180°.

Úloha 18. Nech $n \in \mathbb{N}^+$ a M je n-prvková množina. Majme postupnosť $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ prvkov množiny M, ktorá spĺňa nasledovné vlastnosti:

(i) $a_i \neq a_{i+1}$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$;

(ii) nemožno vybrať štyri indexy b, c, d, $e \in \{1, 2, \dots, k\}$ také, že $b < c < d < e$, $a_b = a_d \neq a_c = a_e$ (teda nejaké dve rôzne čísla x, y nenájdeme v konfigurácii x, y, x, y, nie nutne pri sebe).

Dokážte, že $k \leq 2n - 1$. [Riešenie]

Úloha 19. (*) Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b existujú celé čísla k, l také, že

$$\mathrm{NSD}(a, b) = ka + lb.$$

Nápoveda. Môžete využiť, že $\mathrm{NSD}(a, b) = \mathrm{NSD}(b, a \bmod b)$.

> Pri použití úplnej matematickej indukcie je často nutné dokázať „viacero báz indukcie“. Ide najmä o tie situácie, kde sa v dôkaze indukčného kroku odvolávame na platnosť aspoň jedného výroku $V(n-j)$ pre $j \geq 1$. Takýto dôkaz indukčného kroku je vo všeobecnosti neprípustný pre n také, že $n - j < n_0$ (kde n_0 má význam z vety 3), pretože o $V(n-j)$ v takom prípade vo všeobecnosti nevieme vôbec nič (dokonca ani to, či takýto výrok dáva zmysel). Preto treba „malé hodnoty“ čísla n ošetriť osobitne. Čitateľ by iste dokázal upraviť vetu 3 tak, aby brala na zreteľ aj tento prípad.

Úloha 20. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 8$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 3a + 5b$.

Úloha 21. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 12$ existujú $a, b \in \mathbb{N}$ tak, že platí $n = 4a + 5b$.

Úloha 22. Dokážte tvrdenia z predchádzajúcich dvoch úloh bez použitia úplnej matematickej indukcie.

> *Fibonacciho čísla* sú definované nasledujúcim rekurentným predpisom:
>
> $$\begin{aligned} F_0 &= 0, \\ F_1 &= 1, \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \qquad \text{pre všetky } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$
>
> V nasledujúcom budeme používať označenia
>
> $$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \text{a} \qquad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$
>
> Číslo φ sa zvykne nazývať *zlatý rez*.

Úloha 23. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \psi^n \right).$$

Úloha 24. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ platí

$$\varphi^n = \varphi F_n + F_{n-1}.$$

Úloha 25. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

Úloha 26. Dokážte:

a) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}.$$

b) Pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

Úloha 27. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}.$$

Úloha 28. Dokážte, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ako nerobiť indukciu

Úloha 29. Nájdite chybu v „dôkazoch“ nasledovných „viet“.

„Veta“ 5. Pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$ platí $a = b$.

„Dôkaz“. Matematickou indukciou vzhľadom na $M := \max\{a, b\}$.

1° Pre $M = 0$ nutne $a = b = 0$ a tvrdenie platí.

2° Predpokladajme, že tvrdenie platí pre $M = k$. Ukážeme, že platí aj pre $M = k + 1$.
Nech $a, b \in \mathbb{N}$ sú čísla také, že $\max\{a, b\} = k + 1$. Potom $\max\{a - 1, b - 1\} = k$. Z indukčného predpokladu teda vyplýva, že platí $a - 1 = b - 1$, a teda aj $a = b$. □

Indukcia a dobre usporiadané množiny

Hovoríme, že lineárne usporiadaná množina $(X, <)$ je *dobre usporiadaná*, ak každá neprázdna množina $A \subseteq X$ má v usporiadaní $<$ najmenší prvok. Množina $\mathbb{N}$ je dobre usporiadaná – ide o jednu z jej kľúčových vlastností, ktorá je ekvivalentná princípu matematickej indukcie (a teda môže byť považovaná za jednu z axióm Peanovej aritmetiky práve namiesto princípu matematickej indukcie).

V prípade, že sa pomocou matematickej indukcie dá dokázať pravdivosť nejakého výroku $V(n)$ pre všetky prirodzené čísla $n \geq n_0$, je možné rovnaké tvrdenie dokázať aj s použitím princípu dobrého usporiadania. Stačí za účelom sporu predpokladať, že množina $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \ \wedge\ \neg V(n)\}$ je neprázdna. V takom prípade má táto množina najmenší prvok m. Zostáva dokázať, že:

(*i*) Nemôže platiť $m = n_0$ – to je zrejme ekvivalentné dôkazu pravdivosti výroku $V(n_0)$, a teda báze matematickej indukcie.

(*ii*) Ak $m > n_0$, tak nutne $m - 1 \in A$, čo je spor s minimalitou m. Tu sa v skutočnosti dokazuje iba implikácia „ak $\neg V(m)$, tak $\neg V(m - 1)$“, čo je obmena implikácie „ak $V(m - 1)$, tak $V(m)$“. Keďže $m > n_0$, môžeme zaviesť premennú $n := m - 1$, čím konečne dostávame implikáciu „ak $V(n)$, tak $V(n + 1)$“ z indukčného kroku.

Na dôkaz s využitím vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ sa teda možno dívať ako na „matematickú indukciu sporom“.

Úloha 30. Z princípu matematickej indukcie odvoďte vlastnosť dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$.

Úloha 31. Z vlastnosti dobrého usporiadania množiny $\mathbb{N}$ odvoďte princíp matematickej indukcie.

Úloha 32. Vyberte si niektorú z predošlých úloh. Miesto dôkazu matematickou indukciou ju dokážte s využitím dobrého usporiadania $\mathbb{N}$.

V nasledujúcej úlohe možno použiť napríklad indukciu vzhľadom na n, pričom báza tejto indukcie sa dokáže ďalšou indukciou, tentokrát vzhľadom na k. Alternatívne možno tvrdenie dokazovať indukciou vzhľadom na k a bázu dokázať indukciou vzhľadom na n.

Úloha 33. Uvažujme zobrazenie $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dané nasledovne:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 2, \\ f(n+1,k) &= f(n,k) + 2(n+k+2), \qquad \forall n,k \in \mathbb{N}, \\ f(n,k+1) &= f(n,k) + 2(n+k+1), \qquad \forall n,k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokážte, že pre všetky $n, k \in \mathbb{N}$ platí

$$f(n,k) = (n+k+2)^2 - n - 3k - 2.$$