Cvičenie 2: Dirichletov princíp

Dirichletov princíp vo svojej základnej verzii vyjadruje jednoduché pozorovanie, že po priradení n objektov do $m < n$ priečinkov bude aspoň jeden priečinok obsahovať aspoň dva objekty. Ak teda napríklad n holubov používa $m < n$ holubníkových dier, tak aspoň jednu z dier musia používať najmenej dva holuby (preto je niekedy reč aj o *holubníkovom princípe*, angl. *Pigeonhole principle*).

Priradenie n objektov do m priečinkov možno sformalizovať ako zobrazenie $f : A \to B$ medzi konečnými množinami A a B takými, že $|A| = n$ a $|B| = m$. Základná verzia Dirichletovho princípu potom hovorí, že ak $m < n$, tak takéto zobrazenie nemôže byť injektívne.

Veta 1 (Dirichletov princíp)**.** *Nech A a B sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = m$ a $n > m$. Potom neexistuje žiadne injektívne zobrazenie $f\colon A \to B$.*

Niekedy je užitočné sa na Dirichletov princíp pozerať z pohľadu množín.

Veta 2 (Dirichletov princíp (množinová verzia))**.** *Nech N je n-prvková množina a nech $M_1, M_2, \ldots, M_m$ je m množín s vlastnosťou $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_m = N$. Ak $n > m$, tak niektorá z množín $M_1, M_2, \ldots, M_m$ obsahuje aspoň dva prvky množiny N.*

Pripomíname, že zápis $d \mid a$, *číslo d delí číslo a*, znamená, že existuje celé číslo k, pre ktoré platí $a = kd$. V niektorých úlohách budeme hovoriť o zvyškoch po delení nejakým číslom d nasledovným spôsobom.

Definícia 1. Pre celé čísla a, b, d píšeme

$$a \equiv b \pmod d$$

a hovoríme, že *a je kongruentné s b modulo d*, pokiaľ $d \mid a - b$, teda pokiaľ a a b majú rovnaký zvyšok po delení d. (Ako ste mohli vidieť na UDDŠ, ide o reláciu ekvivalencie na $\mathbb{Z}$.)

→ **Úloha 1.** Majme 5 (nie nutne rôznych) prirodzených čísel. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dve, ktorých rozdiel je deliteľný štyrmi.

→ **Úloha 2.** Majme 101 (nie nutne rôznych) trojciferných prirodzených čísel. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dve, ktoré sa zhodujú v posledných dvoch cifrách (dekadického zápisu).

Úloha 3. Majme $n+1$ (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, kde $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i - a_j \equiv 0 \pmod n$.

Úloha 4. Predpokladajme, že Bratislava má 419678 obyvateľov, z ktorých žiaden nemá viac ako 1000 rokov. Dokážte, že aspoň dvaja Bratislavčania sa narodili v rovnaký deň rovnakého roku.

→ **Úloha 5.** Majme 52 prirodzených čísel $a_1, \ldots, a_{52}$, ktorých zvyšky po delení číslom 100 sú po dvoch rôzne. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i + a_j \equiv 0 \pmod{100}$.

Úloha 6. Majme 52 (nie nutne rôznych) prirodzených čísel $a_1, \ldots, a_{52}$. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať čísla a_i a a_j tak, že $i \neq j$ a $a_i + a_j \equiv 0 \pmod{100}$ alebo $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{100}$.

Úloha 7. Nech $(a_1, \ldots, a_n)$ je konečná postupnosť prirodzených čísel. Dokážte, že z nej možno vybrať neprázdnu *súvislú* podpostupnosť $(a_{i+1}, \ldots, a_j)$ $(i < j)$ tak, aby bol súčet $a_{i+1} + \ldots + a_j$ členov tejto podpostupnosti deliteľný číslom n.

→ **Úloha 8.** Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n+1$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, ktoré majú rozdiel 1.

→ **Úloha 9.** Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Z množiny $\{1, \ldots, 2n\}$ vyberme ľubovoľných $n+1$ (rôznych) čísel. Dokážte, že medzi vybranými číslami musia existovať dve, z ktorých jedno delí to druhé. Platí to, aj keď vyberieme menej ako $n+1$ čísel?
Poznámka. Ak na úlohu neviete prísť hneď, odporúčame si zvoliť za n nejaké rozumne malé číslo, napr. 10.

Úloha 10. Majme $2^{n-4} + 1$ n-bitových binárnych vektorov (teda postupností núl a jednotiek). Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dva, ktoré sa líšia v najviac štyroch bitoch.

→ **Úloha 11.** Vo vnútri rovnostranného trojuholníka o strane dĺžky 2 sa nachádza päť bodov. Dokážte, že spomedzi nich možno vybrať dvojicu bodov, ktoré sú od seba vo vzdialenosti nanajvýš 1.

Úloha 12. Vlk zje každý deň aspoň jednu ovcu, no najviac tri ovce. Medveď zje každý deň aspoň štyri ovce, no najviac sedem oviec. Dokážte, že v každom týždni existujú dva dni, keď bača utrpí rovnakú škodu.

Úloha 13. Počas deviatich kalendárnych týždňov zje vlk každý deň aspoň jednu ovcu, no v každom z deviatich kalendárnych týždňov zje najviac 12 oviec. Dokážte, že existuje úsek po sebe idúcich dní, počas ktorého zje vlk presne 15 oviec.

Predmetom nasledujúcich cvičení sú určité kombinatorické konfigurácie, ku ktorým možno jednoznačne priradiť ich rád (prirodzené číslo $n \in \mathbb{N}$). Konfiguráciou rádu n môže byť napríklad postupnosť n hodov niekoľkými hracími kockami alebo umiestnenie n figúrok na šachovnicu.

Nasledujúce zadania navyše majú vlastnosť, že istá situácia v nich nutne nastáva pre všetky konfigurácie rádu $n \geq n_0$, kým pre konfigurácie rádu $n < n_0$ táto situácia v aspoň jednom prípade nenastáva (zo zadania je väčšinou ľahko vidieť, že takáto „prahová hodnota“ n_0 skutočne existuje). Úlohou je zakaždým nájsť *najmenšie* n také, že daná situácia nastáva pre všetky konfigurácie rádu n (hodnotu n_0), prípadne *najväčšie* n také, že daná situácia ešte pre niektorú konfiguráciu rádu n nenastáva ($n_0 - 1$).

Dôkaz, že hodnota $x \in \mathbb{N}$ je skutočne hľadaným n_0 (resp. $n_0 - 1$) pozostáva z dvoch častí:

(i) Treba dokázať, že $x \leq n_0$ (resp. $x \leq n_0 - 1$) a x je tak dolným odhadom n_0 (resp. $n_0 - 1$): pre $x - 1$ (resp. pre x) ešte daná situácia v aspoň jednej konfigurácii nenastáva.

(ii) Treba tiež dokázať, že $x \geq n_0$ (resp. $x \geq n_0 - 1$) a x je tak horným odhadom n_0 (resp. $n_0 - 1$): pre x (resp. pre $x + 1$) musí daná situácia nutne nastať vo všetkých konfiguráciách.

Dôkaz nerovnosti (i) je väčšinou pomerne jednoduchý, keďže stačí prísť s konkrétnym príkladom konfigurácie rádu $x - 1$ (resp. x), pre ktorú daná situácia nenastáva. Na dôkaz nerovnosti (ii) je zvyčajne potrebné využiť všeobecné dôkazové techniky. Jednou z nich je Dirichletov princíp a práve na tie sa tu sústredíme.

V šachových úlohách budeme hovoriť, že dve figúrky sa ohrozujú práve vtedy, keď jedna z nich vie urobiť ťah na pozíciu obsadenú druhou z nich. Farby figúriek nás nezaujímajú, pokiaľ nie je napísané inak.

→ **Úloha 14.** Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

Úloha 15. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň dvakrát padol rovnaký súčet?

→ **Úloha 16.** Koľko najviac veží možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?

→ **Úloha 17.** Koľko najviac strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 18. Koľko najviac koňov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 19. Koľko najviac bielych pešiakov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali (za predpokladu, že biely pešiak môže stáť aj v ôsmom rade)?

Úloha 20. *Špecializovaný strelec-expert* je šachová figúrka, ktorá sa môže hýbať iba po diagonálach rovnobežných s diagonálou `a1--h8`. Prípustné sú teda práve všetky ťahy po diagonále v smere „doprava hore“ alebo „doľava dole“. Koľko najviac špecializovaných strelcov-expertov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Úloha 21. *Prehnane iniciatívny strelec* je šachová figúrka, ktorej jeden ťah pozostáva z ľubovoľného nenulového počtu ťahov bežného strelca. Koľko najviac prehnane iniciatívnych strelcov možno umiestniť na (štandardnú) šachovnicu tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali?

Veta 3 (Frekvenčná forma Dirichletovho princípu)**.** *Nech A a B sú konečné množiny také, že $|A| = n$, $|B| = m \geq 1$ a $n/m > r - 1$ pre nejaké $r \in \mathbb{N}$. Potom pre ľubovoľné zobrazenie $f\colon A \to B$ existuje prvok $b \in B$ taký, že $f(a) = b$ pre aspoň r rôznych prvkov $a \in A$.*

Úloha 22. Dokážte, že pri devätnástich hodoch hracou kockou musí aspoň štyrikrát padnúť rovnaké číslo.

→ **Úloha 23.** Koľko najmenej hodov dvoma hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

Úloha 24. Koľko najmenej hodov k hracími kockami je nutných na to, aby zaručene aspoň štyrikrát padol rovnaký súčet?

→ **Úloha 25.** Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia 33 veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať päť veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice ostránime zvyšné nevybrané veže.

Úloha 26. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia $k \in \{0, 1, \ldots, 64\}$ veží na (štandardnej) šachovnici možno vybrať $\lceil k/8 \rceil$ veží tak, aby sa žiadne dve z nich neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice ostránime zvyšné nevybrané veže.

Úloha 27. Dokážte, že z ľubovoľného rozostavenia deviatich strelcov na (štandardnej) šachovnici možno vybrať dvoch strelcov tak, aby sa neohrozovali, a to ani potom, čo zo šachovnice odstránime zvyšných nevybraných strelcov. Nájdite vhodné zovšeobecnenie tohto tvrdenia pre $k \in \{0, 1, \ldots, 64\}$ strelcov.

Úloha 28. Nájdite najmenšie také číslo k pre ktoré platí, že v každej k-prvkovej podmnožine množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ sa nachádzajú tri čísla, ktoré majú spoločnú cifru (spoločná cifra musí byť rovnaká pre všetky tri, ale môže v nich byť na rôznych pozíciách, napr. čísla 12, 31 a 17 majú spoločnú cifru 1, ale čísla 42, 47 a 27 nemajú spoločnú cifru). Vaše tvrdenie dokážte.

Ako riešiť a ako spísať riešenie

Najviac priamočiare použitie množinovej verzii Dirichletovho princípu (veta 2) vyzerá zhruba takto:

1. Prečítame si zadanie a zistíme, koľko prvkov máme nájsť a s akou vlastnosťou. Prvky budú naše holuby.
2. Odhadneme, koľko holubníkov (množín $M_1, M_2, \ldots, M_n$) chceme mať.
3. Pokiaľ v zadaní vyberáme niekoľko prvkov z nejakej množiny A (čísla, políčka zo šachovnice), rozdelíme množinu A na m podmnožín $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – holubníkov. Pre každú z týchto množín musí platiť, že ľubovoľné dva prvky z nej musia mať hľadanú vlastnosť. Rozdelenie hľadáme skúšaním, kreslením, ako by to mohlo vyzerať, čo by množiny mohli obsahovať.
4. Ak zo všetkých prvkov množiny A vyberieme n-prvkovú podmnožinu N – teda n holubov, tak položíme $M_i = N \cap A_i$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a na množiny $N, M_1, M_2, \ldots, M_m$ použijeme vetu 2.
5. Spíšeme riešenie.

Samozrejme, sú úlohy, napr. úloha 7, v ktorých treba použiť Dirichletov princíp viac sofistikovane a na prvý pohľad nie je jasné, čo budú holuby a čo holubníky.

Riešenie úlohy 9

(Pre $n = 10$.) Rozložme si množinu $A = \{1, 2, \ldots, 20\}$ nasledovne:

$A_1 = \{1, 2, 4, 8, 16\}$,
$A_2 = \{3, 6, 12\}$,
$A_3 = \{5, 10, 20\}$,
$A_4 = \{7, 14\}$,
$A_5 = \{9, 18\}$,
$A_6 = \{11\}$,
$A_7 = \{13\}$,
$A_8 = \{15\}$,
$A_9 = \{17\}$,
$A_{10} = \{19\}$.

Vidíme, že ak z ľubovoľnej množiny A_i vyberieme dva prvky, tak jeden bude deliť druhý. (Vidíme, lebo množín a ich prvkov je málo a ide o konkrétne množiny. Túto vlastnosť teda vieme skontrolovať pohľadom. Pri väčších (teda aj nekonečných) množinách by sme mali takúto vlastnosť dokázať.) Keďže z množiny A vyberáme 11 čísel, ale máme iba 10 množín, tak z Dirichletovho princípu musíme vybrať dve čísla a, b z tej istej množiny A_i. Vďaka našej voľbe množín A_i pre tieto dve čísla a, b platí, že jedno delí druhé. Tým sme dokázali, čo sme mali.

Formálny záver cez zobrazenia Nech f je zobrazenie, ktoré každému číslu x z 11 vybraných čísel priradí také $i \in \{1, \ldots, 10\}$, že $x \in M_i$ (keďže $\{M_1, M_2, \ldots, M_{10}\}$ je rozklad M, tak ide o korektne definované zobrazenie). Keďže $11 > 10$, tak z Dirichletovho princípu máme, že zobrazenie f nemôže byť injektívne. Preto existujú dve vybrané čísla, ktoré patria do tej istej množiny M_i. Vďaka našej voľbe množín M_i musí jedno z nich deliť druhé.

Formálny záver cez množiny Nech N je 11-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, 20\}$. Definujme 10 množín $M_i = N \cap A_i$ pre $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, ktorých zjednotenie je zjavne N. Keďže $|N| = 11 > 10$, tak z Dirichletovho princípu vyplýva, že niektorá z množín M_i obsahuje aspoň dva prvky. Vďaka voľbe množín M_i jeden z nich delí druhý.

Nápovedy k riešeniam

V minimalizačných (maximalizačných) úlohách používame skratku K na konštrukciu optimálneho rozmiestnenia a skratku O na odhad, že menej (viac) ako spománané minimum (maximum) nemožno dosiahnuť.

1. Každému číslu priradíme zvyšok po delení štyrmi.

5. Rozdeľte si čísla podľa zvyškov: $\{0\}, \{1, 99\}, \ldots, \{49, 51\}, \{50\}$

6. Ak majú čísla navzájom rôzne zvyšky, je to predchádzajúca úloha. Čo ak niektoré dve čísla majú rovnaký zvyšok?

8. Rozdeľte si čísla $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2n - 1, 2n\}$

9. Každému číslu priraďte jeho najväčšieho nepárneho deliteľa.

10. Priraďte vekotru jeho posledné 4 bity.

11. Rozdeľte si trojuholník strednými priečkami na štyri menšie trojuholníky.

12. Spočítajte, koľko rôznych škôd môže bača utrpieť v daný deň.

13. Nájdite najprv súvilsý úsek dní, počas ktorého vlk zje počet oviec deliteľný 15-timi. Nie je na to 9 týždňov veľa? Môže to byť iný násobok 15-tich ako práve 15?

14. 12

15. $5k + 2$

16. 8, K: diagonála, O: rozdeľte si si šachovnicu na stĺpce.

17. 14, K: prvý a posledný riadok bez dvoch rohov, O: rozdeľte si šachovnicu na 14 oblastí po uhlopriečkach (s malou obmenou)

18. 32, K: čierne políčka, O: rozdeľte si šachovnicu na dvojice políčok, z ktorých sa kone navzájom ohrozujú

19. 32

20. 15, O: rozdeľte si šachovnicu na uhlopriečky rovnobežné s `a1--h8`.

21. 2, na každej farbe vie byť len jeden

22. $19/6 > 3$, preto jedno číslo musí padnúť aspoň 4-krát

23. 34

24. $15k + 4$

25. Rozdeľte si šachovnicu na 8 „uhlopriečok“ po 8 políčok – ak uhlopriečka narazí na stranu štvorca, tak pokračuje z druhej strany.

27. Rozdeľte si šachovnicu po stĺpcoch.