Cvičenie 3: Základné enumeračné pravidlá

Veta 1 (Pravidlo súčtu)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Nech X je ich zjednotenie,*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = \bigcup_{k=1}^{n} X_k.$$

Potom

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n| = \sum_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Úloha 1. Medveď si môže dať na obed buď jednu z 50 (rozlíšiteľných) oviec alebo jedného z troch (rozlíšiteľných) valachov (nie však oboje naraz). Z koľkých možností si môže vybrať dohromady?

Úloha 2. Pod grúňom sa pasú dve čriedy o n ovciach a jedna črieda o m ovciach (všetky ovce sú navzájom rozlíšiteľné). Koľko možností má medveď, keď chce zjesť práve jednu ovcu?

Veta 2 (Pravidlo súčinu)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú ľubovoľné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n| = \prod_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Pravidlo súčinu možno aj zovšeobecniť na silnejšiu verziu, kedy dovolíme, neformálne povedané, aby množiny, z ktorých vyberáme prvky záviseli od výberu predošlých prvkov. Dôležité je len to, aby sme zakaždým na daný prvok výslednej usporiadanej n-tice mali rovnaký počet možností. Zapísať pravidlo súčinu riadne formálne je značne komplikované, preto v jeho formulácii od tohto upustíme.

Veta 3. *Nech X je konečná množina. Nech $A \subseteq X^k$, $k \geq 2$, je podmnožina karteziánskeho súčinu X^k, ktoré obsahuje všetky také usporiadané k-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ spĺňajúce podmienky:*

(1) *prvok x_1 je možné z množiny X vybrať n_1 spôsobmi;*

(2) *pre každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, po akomkoľvek výbere usporiadanej i-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ je možné prvok x_{i+1} vybrať vždy n_{i+1} spôsobmi.*

Potom $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

→ **Úloha 3.** Háďžeme troma kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?

Úloha 4. Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?

Úloha 5. Medveď sa ráno zdržuje pri salaši S_1, na obed pri salaši S_2 a večer pri salaši S_3. Na salaši S_1 majú tridsať oviec, na salaši S_2 sto oviec a na salaši S_3 päťdesiat oviec (všetky ovce sú rozlíšiteľné). Medveď si chce dať na raňajky, obed aj večeru práve jednu ovcu. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii?

→ **Úloha 6.** Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel.

→ **Úloha 7.** Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.

→ **Úloha 8.** Nájdite počet všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 9. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.

→ **Úloha 10.** Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

Úloha 11. Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa buď začínajú na a, alebo sa súčasne nezačínajú na a a končia na c?

→ **Úloha 12.** Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b?

→ **Úloha 13.** Nájdite počet kladných deliteľov čísla 120.

Úloha 14. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.

→ **Úloha 15.** Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.

Úloha 16. Nájdite počet 3-cirených čísel, ktoré možno zložiť z cifier 1, 2, 3, 4. Cifry nemôžeme používať opakovane.

→ **Úloha 17.** Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry navázjom rôzne.

Úloha 18. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

> **Veta 4** (Pravidlo mocnenia). *Nech A, B sú ľubovoľné konečné množiny, $|A| = k$, $|B| = n$. Potom $|B^A| = |B|^{|A|} = n^k$.*
>
> V kombinatorike väčšinou pracujeme s konvenciou $0^0 = 1$ – pravidlo mocnenia tak dáva zmysel aj pre $n = m = 0$, čo súhlasí so skutočnosťou, že existuje jediné zobrazenie medzi dvoma prázdnymi množinami.
>
> **Definícia 1** (Variácie s opakovaním). Nech $A = \{1, \dots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže prvok množiny B^A.
>
> **Veta 5.** *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B je n^k.*
>
> **Definícia 2** (Variácie bez opakovania). Nech $A = \{1, \dots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné injektívne zobrazenie $f\colon A \to B$. Množinu všetkých injektívnych zobrazení z A do B označujeme I_B^A.
>
> **Veta 6.** *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B je*
>
> $$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

Úloha 19. Pod grúňom je 10 salašov a na každom majú 50 (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 20. Pod grúňom je n salašov a na každom majú m (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 21. Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$?

Úloha 22. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

Úloha 23. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa končia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 24. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jeden výskyt písmena c?

Úloha 25. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel.

→ **Úloha 26.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X?

→ **Úloha 27.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré začínajú párnym číslom?

Úloha 28. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré začínajú nepárnym číslom?

→ **Úloha 29.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne?

Úloha 30. Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?

→ **Úloha 31.** Nech $X = \{1, \dots, 100\}$. Koľko je všetkých aspoň 97-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne?

Veta 7 (Pravidlo rozdielu). *Nech A, U sú ľubovoľné konečné množiny také, že $A \subseteq U$. Potom*

$$|U \setminus A| = |U| - |A|.$$

Úloha 32. Dokážte pravidlo rozdielu (vetu 7).

→ **Úloha 33.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa nekončia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 34. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré neobsahujú práve jeden výskyt písmena c?

→ **Úloha 35.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré nobsahujú aspoň jeden výskyt písmena c?

Úloha 36. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.

Úloha 37. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 5.

Úloha 38. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu z cifier $\{1, 3, 7\}$.

Ako formálne riešiť kombinatorické úlohy

Rišenie úlohy 12

Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b?

Usporiadané pätice si rozdelíme na niekoľko množín podľa toho, na ktorej pozícii sa objavujú po sebe idúce výskyty b. Pre stručnosť si označme $Z = \{a, c, d\}$.

- **1. a 2. pozícia:** množinu takýchto 5-tíc vieme vyjadriť ako $\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z$.
- **2. a 3. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z$.
- **3. a 4. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z$.
- **4. a 5. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times Z \times \times Z \times \{b\} \times \{b\}$.

Množinu všetkých riešení vieme tak vyjadriť ako

$$\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z \cup Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \cup Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \cup Z \times Z \times \times Z\{b\} \times \{b\}.$$

Všetky tieto štyri množiny sú navzájom disjunkté, lebo sa líšia v pozícii b-čok. Preto podľa pravidla súčtu jej veľkosť je rovná

$$|\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z| + |Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z| + |Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z| + |Z \times Z \times \times Z\{b\} \times \{b\}|.$$

To je zas podľa pravidla súčinu rovné

$$|\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| \cdot |Z| \cdot |Z| + |Z| \cdot |\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| \cdot |Z| + |Z| \cdot |Z| \cdot |\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| + |Z| \cdot |Z| \cdot | \times Z\{b\}| \cdot |\{b\}| =$$
$$1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 4 \cdot 3^3.$$

Rišenie úlohy 8

Nie všetky kombinatorické úlohy sú však o usporiadaných n-ticiach, že ich pekne vieme dostať z pravidla súčinu – napr. keď máme počítať nejaké čísla.

Nájdite počet všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry.

Množinu cifier si označme $C = \{0, 1, \dots, 9\}$ a množinu všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry, si označme A. Zostrojme množinu

$$B = (C - \{0\}) \times C \times C \times C,$$

ktorá má podľa pravidla súčinu veľkosť $|B| = |C - \{0\}| \cdot |C| \cdot |C| \cdot |C| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$.

Táto naša množina „reprezentuje" hľadné 5-ciferné čísla, lebo každé také číslo je určené ciframi na prvých štroch miestach zľava – posledná cifra je určená predposlednou. Tento fakt vieme formálne vyjadriť nájdením bijekcie. (Tento odsek nie je podrebný v riešení.)

Zostrojme zobrazenie $f\colon B \to A$, ktoré usporiadanej 4-ici (a, b, c, d) priradí číslo v dekadickom zápise $\overline{abcdd}$. Toto zobrazenie je zjavne bijekcia, preto $|A| = |B| = 9\,000$.

Programátorský prístup

Všimnime si, že z takéhoto formálneho riešenia, vieme pomerne priamočiaro zostrojiť program, ktorý nám všetky možnosti vypíše. Karteziánsky súčin vieme ľaho reprezentovať vnorenými `for` cyklami. Pre prehľadnosť si pre rozdiel množín definujeme vlastnú funkciu `difference`.

```cpp
#include <iostream>
#include <set>

using namespace std;

set<int> difference(const set<int> &A, const set<int> &B) {
    set<int> C;
    for (int a : A) {
        if (B.count(a) == 0) {
            C.insert(a);
        }
    }
    return C;
}

void uloha_3_8() {
    set<int> C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
    int pocet = 0;
    for (int a : difference(C, {0})) {
        for (int b : C) {
            for (int c : C) {
                for (int d : C) {
                    cout << a << b << c << d << endl;
                    pocet++;
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet << " moznosti\n";
}

int main() {
    uloha_3_8();
    return 0;
}
```

Takýto prístup nie vždy vedie k efektívnemu spôsobu, ako by sme riešenie danej úlohy naprogramovali. Takéto programovanie riešení nám vie pomôcť lepšie si predstaviť, čo sa deje pri počítaní riešení. Dôležité je, aby sme v programe vedeli ľahko spočítať, koľko možností nám vypšíe. To znamená, že vypisovanie možností nemá byť podmienené `if`-mi alebo inými programátorskými konštrukciami, ktoré nám komplikujú počítanie.

Rišenie úlohy 17

V mnohých zložitejších úlohách nám však pravidlo súčinu stačiť nebude

> Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne.

Nech A je množina čísel zo zadania a $C = \{0, 1, \dots, 9\}$ je množina cifier. Nech B je množina usporiadaných štvoríc (a, b, c, d), kde

- $a \in C - \{0\}$, $|C - \{0\}| = 9$;
- $b \in C - \{a\}$, $|C - \{a\}| = 9$ pre každú voľbu a;
- $c \in C - \{a, b\}$, $|C - \{a, b\}| = 8$ pre každú voľbu a, b;
- $d \in C - \{a, b, c\}$, $|C - \{a, b, c\}| = 7$ pre každú voľbu a, b, c.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu $|B| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$. Zobrazenie $f\colon A \to B$, $f((a, b, c, d)) = \overline{abcd}$ je zjavne bijekcia. Preto $|A| = |B| = 4\,536$.

Programátorské riešenie

```
void uloha_3_17() {
    set<int> C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
    int pocet = 0;
    for (int a : difference(C, {0})) {
        for (int b : difference(C, {a})) {
            for (int c : difference(C, {a, b})) {
                for (int d : difference(C, {a, b, c})) {
                    cout << a << b << c << d << endl;
                    pocet++;
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet << " moznosti\n";
}
```

Tu vidíme, že pri programovaní vlastne ani nebadať rozdiel medzi bežným a zovšeobecneným pravidlom súčinu.

Riešenia

Riešenia úloh sú celkom provizórne. Je možné, že obsahujú nejaké chyby, preklepy. Budem rád, pokiaľ mi každú nezrovnalosť nahlásite mailom na rajnik zavinac dcs.fmph.uniba.sk.

1. 53

2. $n + m$

3. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

4. $6 \cdot 3 = 18$

5. $30 \cdot 100 \cdot 50 = 150\,000$

6. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

7. $9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 = 99\,900$

8. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$

9. $9\,990$

10. $2 \cdot 4^4 = 512$

11. $4^4 + 3 \cdot 4^3 = 448$

12. $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108$

13. $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

14. $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 810$

15. $13 \cdot 7 \cdot 7$ deliteľov $(3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7^6)$

16. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

17. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

18. $4 \cdot (6 \cdot 10) = 240$

19. 50^{10}

20. m^n

21. 4^n

22. $2 \cdot 4^{n-1}$

23. $4^{n-3} \cdot 4 = 4^{n-2}$

24. $n \cdot 3^{n-1}$

25. $9 \cdot 10^{n-1}$

26. 100^{20}

27. $50 \cdot 100^{19}$

28. $50 \cdot 100^{19}$

29. $100^{\underline{20}}$

30. $50 \cdot 99^{\underline{19}}$

31. $100^{\underline{97}} + 100^{\underline{98}} + 100^{\underline{99}} + 100^{\underline{100}}$

32. Ľahko užáeme, že platí $U = U \setminus A \cup A$ a že množiny $U \setminus A$, A sú disjunktné. Potom len upravíme pravidlo súčtu.

33. $4^n - 4^{n-2}$

34. $4^n - n \cdot 3^{n-1}$

35. $4^n - \cdot 3^n$

36. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ (pre $n \geq 3$)

37. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ (pre $n \geq 2$)

38. $9 \cdot 10^{n-1} - 6 \cdot 7^{n-1}$