Cvičenie 4: Štandardné kombinatorické konfigurácie

Definícia 1 (Variácie s opakovaním)**.** Nech $A = \{1, \dots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže prvok množiny B^A.

Veta 1. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B je n^k.*

Definícia 2 (Variácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \dots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné injektívne zobrazenie $f\colon A \to B$.

Veta 2. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B je*

$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

Definícia 3 (Permutácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \dots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Permutáciou množiny B* nazveme ľubovoľné bijektívne zobrazenie $f\colon A \to B$, čiže variáciu bez opakovania n-tej triedy z n-prvkov množiny B.

Veta 3. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Počet permutácií množiny B je*

$$n! := n^{\underline{n}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (n-k).$$

Nech A je konečná množina. Zjavne existuje bijekcia medzi podmnožinami množiny A a zobrazeniami $f\colon A \to \{0,1\}$: ku každej podmnožine $B \subseteq A$ totiž môžeme definovať jej *charakteristické zobrazenie* $\chi_B\colon A \to \{0,1\}$ ako

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{ak } x \in B \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \qquad \text{pre všetky } x \in A$$

a naopak, ku každému zobrazeniu $f\colon A \to \{0,1\}$ vieme definovať jeho *nosič* ako množinu

$$\operatorname{supp}(f) = \{x \in A \mid f(a) \neq 0\}.$$

Ľahko vidieť, že obe priradenia $B \mapsto \chi_B$ a $f \mapsto \operatorname{supp}(f)$ sú injektívne (v skutočnosti ide dokonca o navzájom inverzné bijekcie). Podmnožín konečnej množiny A je teda presne toľko, čo prvkov množiny $\{0,1\}^A$. Z pravidla mocnenia potom dostávame:

Dôsledok 1. *Nech A je ľubovoľná konečná množina taká, že $|A| = n$. Potom*

$$|\mathscr{P}(A)| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|} = 2^n.$$

Z tohto dôvodu sa potenčná množina $\mathscr{P}(A)$ často zvykne označovať aj ako 2^A.

Definícia 4 (Kombinácie bez opakovania)**.** Nech B je konečná množina taká, že $|B| = n$ a nech $k \in \mathbb{N}$. *Kombináciou bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľnú k-prvkovú podmnožinu množiny B.

Množina všetkých k-prvkových podmnožín konečnej množiny B – čiže množina všetkých kombinácií k-tej triedy z B – sa zvykne označovať ako $\mathscr{P}_k(B)$ alebo ako $\binom{B}{k}$.

Veta 4. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet kombinácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B je*

$$|\mathscr{P}_k(B)| = \left|\binom{B}{k}\right| = \binom{n}{k} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.$$

Ak navyše $k \leq n$, tak

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pri niektorých úlohách je výhodné započítať možnosti viackrát. Pokiaľ každú možnosť započítame rovnako veľa krát, tak predelením príslušným číslom dostaneme správny výsledok. Jedna z formálnych podôb tohto pravidla je nasledovná.

Veta 5 (Pravidlo delenia)**.** *Nech A a B sú množiny, k je kladné celé číslo a nech f je zobrazenie $A \to B$, pre ktoré platí $|f^{-1}(\{b\})| = k$ pre každý prvok $b \in B$ (teda na každý prvok $b \in B$ sa zobrazí rovnaký počet prvkov množiny A). Potom*

$$|B| = \frac{|A|}{k}.$$

Zobrazenie $f\colon A \to B$ so spomínanou vlastnosťou $\forall b \in B\colon |f^{-1}(\{b\})| = k$ sa tiež niekedy skrátene nazýva *k-na-1 zobrazenie*, angl. *k-to-1 correspondence* (lebo k prvkov z A sa zobrazí na jeden prvok z B). V tejto reči je teda bijekcia 1-to-1 correspondence.

→ **Úloha 1.** V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Koľko existuje rôznych ťahov, ak záleží na poradí vytiahnutých čísel?

Úloha 2. Máme $n \geq 7$ kníh, ale len 7 voľných miest na poličke. Koľko máme možností na uloženie kníh na prázdne miesta?

Úloha 3. Koľko prvkov obsahuje množina X taká, že počet variácií bez opakovania druhej triedy z prvkov X je 240?

Úloha 4. Máme množinu, ktorá má x prvkov. Ak sa počet jej prvkov zväčší o 2, tak počet variácií bez opakovania tretej triedy z jej prvkov sa zväčší o 384. Nájdite x.

→ **Úloha 5.** Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku aj stĺpci bolo práve jedno čierne políčko?

→ **Úloha 6.** Vo firme je 8 zamestnancov. Koľkými spôsobmi možno vybrať skupinu zamestnancov, ktorá sa zúčastní konferencie.

→ **Úloha 7.** V hre Mates sa ťahá 5 čísel z 35. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých čísel?

→ **Úloha 8.** V Športke sa ťahá 7 čísel zo 49. Z nich je šesť čísel riadnych a jedno dodatkové. Koľko existuje rôznych ťahov, ak nezáleží na poradí vytiahnutých riadnych čísel, ale záleží na rozdiele medzi riadnym a dodatkovým číslom?

→ **Úloha 9.** Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú rovnaký počet oboch písmen?

Úloha 10. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a?

Úloha 11. Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 7 výskytov písmena a?

→ **Úloha 12.** Koľko je 20-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c\}$, ktoré obsahujú práve 6 alebo 7 výskytov písmena a?

Úloha 13. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku párny počet bielych políčok?

→ **Úloha 14.** Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $2n \times 2n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby v každom riadku bolo rovnako veľa bielych a čiernych políčok?

Úloha 15. Koľkými spôsobmi možno ofarbiť políčka štvorcovej mriežky o rozmeroch $n \times n$ dvoma farbami (bielou a čiernou) tak, aby bol v každom riadku aj stĺpci párny počet bielych políčok?

> V nasledujúcich úlohách rozumieme pod *kartou* usporiadanú dvojicu $(c, n) \in F \times H$, kde
>
> $$F = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \quad \text{a} \quad H = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A\}.$$
>
> Prvky množiny F nazývame *farby* a prvky množiny H *hodnoty*. Množina hodnôt je lineárne usporiadaná: $2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < J < Q < K < A$. Pod *pokrovou kombináciou* rozumieme ľubovoľnú množinu piatich (rôznych) kariet. Pre stručnosť môžeme miesto (c, n) zapisovať ako cn, napr. $\heartsuit 7$.

→ **Úloha 16.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií?

→ **Úloha 17.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet rovnakej farby (*straight flush*)?

Úloha 18. Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich štyri karty s rovnakým číslom?

→ **Úloha 19.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich tri karty s číslom x a dve karty s číslom $y \neq x$ (*full house*)?

→ **Úloha 20.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií iných ako *full house*?

Úloha 21. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, v ktorých majú všetky karty rovnakú farbu (*flush*)?

Úloha 22. Koľko je všetkých pokrových kombinácií, z ktorých možno vytvoriť postupku piatich kariet ľubovoľnej farby, ktoré nie sú straight flush (*straight*)?

→ **Úloha 23.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií, ktoré obsahujú trojicu kariet rovnakej hodnoty a zvyšné dve inej hodnoty, navzájom rôznej (*trojica*);

→ **Úloha 24.** Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x, dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z, pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?

→ **Úloha 25.** Koľko je všetkých pokrových kombináci, ktoré obsahujú aspoň jedno eso?

→ **Úloha 26.** Na večierku je n mužov a n žien. Koľkými spôsobmi sa vedia postaviť do kruhu, ak

a) nie sú žiadne obmedzenia,

b) dve ženy nesmú stáť vedľa seba.

Úloha 27. Za okrúhly stôl s $2n$ stoličkami chceme usadiť n manželských párov. Manželia musia sedieť vedľa seba, ale je jedno, či muž bude napravo od manželky alebo opačne. Koľkými spôsobmi ich môžeme usadiť, ak

a) rozlišujeme stoličky?

b) nerozlišujeme stoličky?

Koľko je všetkých pokrových kombinácií obsahujúcich dve karty s číslom x, dve karty s číslom y a jednu kartu s číslom z, pričom $z \neq x \neq y \neq z$ (*dva páry*)?

Riešenie cez pravidlo delenia

- Vyberieme hodnotu $a \in H$ pre prvý pár – 13 možností.
- Vyberieme farby $\{f, g\} \in \binom{F}{2}$ pre prvý pár – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme hodnotu $b \in H$ pre druhý pár – 12 možností.
- Vyberieme farby $\{h, i\} \in \binom{F}{2}$ pre druhý pár – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme poslednú kartu $(j, c) \in F \times (H - \{a, b\})$ – $11 \cdot 4$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu má množina A takýchto usporiadaných pätíc $(a, \{f, g\}, b, \{h, i\}, (c, j))$ veľkosť $13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4$. Majme zobrazenie $f\colon A \to B$, kde B je množina možností zo zadania, s predpisom

$$f(a, \{f, g\}, b, \{h, i\}, (c, j)) = \{fa, ga, hb, ib, jc\}.$$

Ktoré 5-tice sa zobrazia na pokrovú kombináciu $\{fa, ga, hb, ib, jc\}$? Na prvom mieste musí byť hodnota z nejakého páru – to môže byť a alebo b. Na druhom mieste sme museli vybrať dvojicu farieb $\{f, g\}$, ak sme vybrali a, alebo dvojicu $\{h, i\}$, ak sme vybrali b. Na tretie miesto sme museli vybrať druhú z hodnôt a, b, ktoré máme dvakrát. Na štvrté zvyšnú dvojicu farieb a na piate miesto (j, c). Dostávame tak dve 5-tice $(a, \{f, g\}, b, \{h, i\}, (j, c))$ a $(b, \{h, i\}, a, \{f, g\})$. Podľa pravidla delenia tak máme

$$|B| = \frac{|A|}{2} = \frac{13 \cdot \binom{4}{2} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4}{2} = 123\,552.$$

Riešenie bez pravidla delenia

- Vyberieme hodnoty $\{a, b\} \in \binom{H}{2}$, ktoré sa vyskytnú dvakrát – $\binom{13}{2}$ možností. Hodnoty v množine $\{a, b\}$ si označíme tak, aby platilo $a < b$.
- Vyberieme farby $\{f, g\} \in \binom{F}{2}$ pre pár s hodnotou a – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme farby $\{h, i\} \in \binom{F}{2}$ pre pár s hodnotou b – $\binom{4}{2}$ možností.
- Vyberieme poslednú kartu $(j, c) \in F \times (H - \{a, b\})$ – $11 \cdot 4$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu máme $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4$ možností, ako vybrať usporiadanú štvoricu $(\{a, b\}, \{f, g\}, \{h, i\}, (c, j))$, ktorej priradíme pokrovú kombináciu $\{fa, ga, hb, ib, jc\}$. Takéto zobrazenie je bijekcia. To môžeme ukázať tak, že opäť zistíme, ktoré 4-ice sa zorbazia na pokrovú kombináciu $\{fa, ga, hb, ib, jc\}$. Na prvom mieste musia mať množinu dvoch hodnôt vyskytujúcich sa dvakrát – to musí byť $\{a, b\}$. Na druhom mieste musí byť dvojica farieb menšej hodnoty, na treťom dvojica farieb väčšej hodnoty a na štvrtom ostáva dvojica (i, c) pre kartu mimo párov. Vzor každej pokrovej kombinácie je teda určený jednoznačne, teda ide o bijekciu. Preto je počet dvoch párov

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 11 \cdot 4 = 123\,552.$$

Veľmi častou chybou pri riešení takýchto zložitejších úloh býva chybné určenie toho, koľkokrát sme započítali každú možnosť. Preto pri riešení kombinatorických úloh si dávajte pozor na to, či ste niečo nezapočítali viackrát. A ak hej, tak si dobre skontrolujte, koľkokrát ste každý prvok započítali a či je to rovnako veľa. Pri niektorých riešeniach totiž môžeme zarátať možnosti rôzne veľa krát – a to sa potom ťažko opravuje na správne riešenie.

Program vypisujúci možnosti

Problém započítavania možností viackrát si môžeme ilustrovať aj na tom, aké programy zodpovedajú týmto riešeniam.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#include "Combinatorics.h"

using namespace std;

set<int> difference(const set<int> &A, const set<int> &B) {
    set<int> C;
    for (int a : A) {
        if (B.count(a) == 0) {
            C.insert(a);
        }
    }
    return C;
}

// Mnozina hodnot, pre jednoduchost mame 11 = J, 12 = Q, 13 = K, 14 = A
set<int> H = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14};
// Mnozina farieb: S = srdcia, K = kary, T = trefy, P = piky
set<char> F = {'S', 'K', 'T', 'P'};


void dva_pary_1() {
    ofstream outf("dva_pary_1.txt");
    int pocet = 0;

    for (int a : H) {
        for (auto s : combinations_without_repetitions(F, 2)) {
            char f =  *(s.begin());
            s.erase(s.begin());
            char g = *(s.begin());
            for (int b : difference(H, {a})) {
                for (auto t : combinations_without_repetitions(F, 2)) {
                    char h = *(t.begin());
                    t.erase(t.begin());
                    char i = *(t.begin());
                    for (char j : F) {
                        for (int c : difference(H, {a, b})) {
                            outf << f << a << " "
                                 << g << a << " "
                                 << h << b << " "
                                 << i << b << " "
                                 << j << c << endl;
                            pocet++;
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet / 2 << " moznosti\n";
}

void dva_pary_2() {
    ofstream outf("dva_pary_2.txt");
    int pocet = 0;

    for (auto r : combinations_without_repetitions(H, 2)) {
        int a = *(r.begin());
        r.erase(r.begin());
        int b = *(r.begin());
        for (auto s : combinations_without_repetitions(F, 2)) {
            char f =  *(s.begin());
            s.erase(s.begin());
            char g = *(s.begin());
```

```
            for (auto t : combinations_without_repetitions(F, 2)) {
                char h = *(t.begin());
                t.erase(t.begin());
                char i = *(t.begin());
                for (char j : F) {
                    for (int c : difference(H, {a, b})) {
                        outf << f << a << " "
                             << g << a << " "
                             << h << b << " "
                             << i << b << " "
                             << j << c << endl;
                        pocet++;
                    }
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet << " moznosti\n";
}

int main() {
    dva_pary_1();
    dva_pary_2();
}
```

Program využíva knižnicu Combinatorics.h, na ktorej pracuje študentka Nadiya Balanchuk v rámci ročníkového projektu. Môžete si ju stiahnuť zo stránky: `http://davinci.fmph.uniba.sk/~balanchuk2/rp.html`. Hore uvedený program si môžete stiahnuť na: `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg/cvika/poker.cpp`.

Funkcia `dva_pary_1` vypisuje každé riešenie dvakrát (môžete si overiť vo výstupnom súbore, nájdete tam napr. `K2 P2 K3 P3 K4` aj `K3 P3 K2 P2 K4`, čo zodpovedá tej istej pokrovej kombinácii). Preto výsledný počet delíme dvomi. Za to funkcia `dva_pary_2` zapisuje do súboru každú možnosť práve raz.

Tiež si môžete na týchto programoch všimnúť princíp bijekcie (príp. iných zobrazení k-na-1)

Výsledky úloh

1. $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 = 49^{\underline{7}}$

2. $n^{\underline{7}}$

3. 16

4. 8

5. $n!$

6. 2^8

7. $\binom{35}{5}$

8. $\binom{49}{7} \cdot 7$

9. $\binom{20}{10}$

10. $\binom{20}{7}$

11. $\binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

12. $\binom{20}{6} \cdot 2^{14} + \binom{20}{7} \cdot 2^{13}$

13. $2^{n(n-1)}$

14. $\binom{2n}{n}^{2n}$

15. $2^{(n-1)^2}$

16. $\binom{52}{5}$

17. $9 \cdot 4 = 36$

18. $13 \cdot 48 = 624$

19. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744$

20. $\binom{52}{5} - 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 2595216$

21. $4 \cdot \binom{13}{5} = 5148$

22. $9 \cdot 4^5 - 40 = 9176$

23. $13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 48 \cdot 44/2 = 54\,912$

24. $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44 = 123552$

25. $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$.

26. a) $(2n-1)!$, b) $\dfrac{(n!)^2}{n} = n! \cdot (n-1)!$

27. a) $2 \cdot n! \cdot 2^n$, b) $\frac{2 \cdot n! \cdot 2^n}{2n} = (n-1)! \cdot 2^n$