Cvičenie 6: základné kombinatorické konfigurácie II

Definícia 1 (Kombinácie s opakovaním)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Na množine B^A všetkých variácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B definujme reláciu ekvivalencie R takú, že pre $f, g \in B^A$ platí fRg práve vtedy, keď pre všetky $x \in B$ platí $\left|f^{-1}(\{x\})\right| = \left|g^{-1}(\{x\})\right|$ – teda ak sa na každý prvok množiny B pri oboch zobrazeniach zobrazí rovnako veľa prvkov množiny A. *Kombináciou s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľnú triedu ekvivalencie relácie R.

Variácie s opakovaním možno chápať aj ako postupnosti prvkov množiny B, ktoré sa môžu ľubovoľne opakovať. Na kombinácie s opakovaním sa možno dívať ako na variácie s opakovaním, pri ktorých nás nezaujíma poradie jednotlivých prvkov. To formalizujeme pomocou stotožnenia tých variácií s opakovaním, ktoré sa líšia iba v poradí prvkov – čiže tých, ktoré (chápané ako postupnosti) obsahujú rovnaké počty jednotlivých prvkov množiny B.

V rovnakom duchu by bolo možné definovať aj kombinácie bez opakovania ako triedy ekvivalencie relácie R zúženej na variácie bez opakovania (čiže na injektívne zobrazenia z B^A). Čitateľ by iste ľahko dokázal, že takáto definícia je ekvivalentná našej definícii cez podmnožiny. Kombinácie s opakovaním by naopak zjavne bolo možné definovať analogicky ku kombináciám bez opakovania ako multimnožiny prvkov z B (kde multimnožina je množina spoločne s multiplicitami jednotlivých jej prvkov). Ľahko vidieť, že triedy ekvivalencie relácie R z definície 1 sú iba jednou z možností ako formálne zadefinovať multimnožinu.

Veta 1. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet kombinácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B je $\binom{n+k-1}{k}$.*

Úloha 1. Kombinatoricky interpretujte vetu 1.

→ **Úloha 2.** Na salaši chovajú ovce z deviatich plemien (nekonečne veľa oviec z každého plemena). Ovce rovnakého plemena sú navzájom neodlíšiteľné. Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď, ktorý chce zjesť presne päť oviec?

→ **Úloha 3.** Koľko rôznych jedálničkov má k dispozícii medveď z predchádzajúcej úlohy v prípade, že sa rozhodol držať diétu a zjesť *najviac* štyri ovce?

→ **Úloha 4.** Uvažujme rovnicu
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k,$$
kde $n, k \in \mathbb{N}$. Nájdite počet riešení tejto rovnice v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

→ **Úloha 5.** Uvažujme nerovnosť
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq k,$$
kde $n, k \in \mathbb{N}$. Nájdite počet riešení tejto nerovnosti v prirodzených číslach a v nenulových prirodzených číslach.

Definícia 2 (Permutácie s opakovaním)**.** Nech $A = \{1, \ldots, n\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ a $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ je rozklad množiny B na k disjunktných podmnožín, pričom $|B_1| = n_1, |B_2| = n_2, \ldots, |B_k| = n_k$. Definujme na množine všetkých bijekcií z A do B reláciu ekvivalencie R takú, že pre dvojicu bijekcií $f, g \colon A \to B$ platí fRg práve vtedy, keď pre všetky $i \in A$ existuje index $j \in \{1, \ldots, k\}$ tak, že $f(i)$ aj $g(i)$ patria do B_j – teda ak sa všetky prvky A zobrazia pri oboch zobrazeniach na prvok rovnakej triedy rozkladu množiny B. *Permutáciou s opakovaním* z n_1 prvkov prvého druhu, n_2 prvkov druhého druhu, ..., n_k prvkov k-teho druhu nazveme ľubovoľnú triedu ekvivalencie relácie R.

Veta 2. *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}$ sú ľubovoľné a nech $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ sú také, že $n_1 + \ldots + n_k = n$. Počet permutácií s opakovaním z n_1 prvkov prvého druhu, n_2 prvkov druhého druhu, ..., n_k prvkov k-teho druhu je*
$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

→ **Úloha 6.** Koľko prešmyčiek je možné vytvoriť zo slova `ANTANANARIVO`?

Úloha 7. Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po výmene pozícií nejakého počtu figúrok? (Vo výsledom rozostavení je teda rovnaká sada figúrok a obsadených je rovnakých 32 políčok.)

Nasledujúce úlohy sú zamerané na konfigurácie rôznych typov.

→ **Úloha 8.** Na šachovnici stojí všetkých 32 štandardných figúrok. Koľko možných rozostavení možno získať po prehodení práve jednej dvojice figúrok?

→ **Úloha 9.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok (bez obmedzení daných šachovými pravidlami).

Úloha 10. Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby všetky biele figúrky boli v riadkoch 1 až 4 a všetky čierne figúrky boli v riadkoch 5 až 8?

→ **Úloha 11.** Koľkými spôsobmi možno rozostaviť na šachovnicu štandardnú sadu 32 figúrok tak, aby v každom stĺpci bol práve jeden biely pešiak?

→ **Úloha 12.** Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dve čierne veže a bieleho kráľa tak, aby žiadna z veží kráľa neohrozovala? (Veža v našej terminológii ohrozuje kráľa aj v prípade, keď ju kráľ môže v ďalšom kroku vyhodiť.)

Úloha 13. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu bieleho a čierneho koňa tak, aby sa navzájom neohrozovali?

Úloha 14. Koľkými spôsobmi možno postaviť na šachovnicu dvoch nerozlíšiteľných koňov tak, aby sa navzájom neohrozovali?

→ **Úloha 15.** Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej časť (nezáleží nám na poradí)?

Úloha 16. Koľkými spôsobmi možno vybrať zo štandardnej sady 32 figúrok nejakú jej podmnožinu tak, aby obsahovala aspoň jedného strelca a najviac troch koňov?

Úloha 17. V obchode majú 13 druhov keksíkov. Chceme si kúpiť 24 keksíkov tak, aby sme z každého druhu kúpili aspoň jeden. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť?

Úloha 18. Určte počet 7-ciferných čísel, ktoré majú cifry

a) v klesajúcom poradí,

b) v rastúcom poradí,

c) v nerastúcom poradí,

d) v neklesajúcom poradí.

Úloha 19. Na poličke je za sebou uložených 12 kníh. Koľkými spôsobmi možno vybrať spomedzi nich 5 tak, aby sme nevybrali žiadne dve vedľa seba?

Úloha 20. Katka, Lenka, Norbert, Marek a Oľga nazbierali 47 nerozlíšiteľných jabĺk. Chcú si ich rozdeliť tak, že Katka a Lenka dostanú párny počet jabĺk a Norbert, Marek a Oľga dostanú nepárny počet jabĺk. Koľkými spôsobmi to môžu spraviť?

→ **Úloha 21.** Máme 52 kariet: 26 červených a 26 modrých. Koľkými spôsobmi možno z nich vybrať podmnožinu tak, aby v nej bol rovnaký počet červených a modrých kariet?

Úloha 22. Nech k, $d \in \mathbb{N}^+$ a nech A je množina majúca kd prvkov. Určte počet rozkladov množiny A na d-prvkové podmnožiny.

Riešenia

2. $\binom{13}{5}$

3. $\binom{13}{4}$

4. v $\mathbb{N}$: $\binom{n+k-1}{k}$, v $\mathbb{N}^+$: $\binom{k-1}{k-n}$

5. v $\mathbb{N}$: $\binom{n+k}{k}$, v $\mathbb{N}^+$: $\binom{n}{k}$

6. $\dfrac{12!}{4! \cdot 3!}$

7. $\dfrac{32!}{8! \cdot 8! \cdot (2!)^6}$

8. $\binom{32}{2} - 2(\binom{8}{2} - 3) + 1$

9. $\dfrac{64!}{32! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 2^6}$

10. $\left(\dfrac{32!}{16! \cdot 8! \cdot 2^3}\right)^2$

11. $8^8 \cdot \binom{56}{24} \dfrac{24!}{8! \cdot 2^6}$

12. $64\binom{49}{2} = 49\,728$

13. $64 \cdot 63 - (4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8) = 3\,696$

14. $3\,696/2 = 1\,848$

15. $(9 \cdot 3^3 \cdot 2^2)^2$

16. $2^{24}(2^4 - 1)(2^4 - 1) = 2^{24} \cdot 15^2 = 3\,774\,873\,600$

17. $\binom{23}{11} = 1\,352\,078$

18. a) $\binom{10}{7}$, b) $\binom{9}{7}$, c) $\binom{9+7}{7} - 1$, d) $\binom{8+7}{7}$

19. $\binom{8}{5} = 56$

20. $\binom{5+22-1}{22} = \binom{26}{22} = 14\,950$, 2. sada D. Ú. 2019/20

21. $\sum_{k=0}^{26} \binom{26}{k}\binom{26}{k} = \binom{52}{26}$

22. $\dfrac{(kd)!}{k!(d!)^k}$