Cvičenie 9: Asymptotické odhady

Definícia 1. Nech $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sú funkcie. Potom píšeme:

(*i*) $f(n) = O(g(n))$ (*f rastie nanajvýš tak rýchlo ako g*), ak existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.

(*ii*) $f(n) = \Omega(g(n))$ (*f rastie aspoň tak rýchlo ako g*), ak $g(n) = O(f(n))$. Môžeme tiež používať evkvivalentnú definíciu: existuje $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \geq c \cdot |g(n)|$.

(*iii*) $f(n) = \Theta(g(n))$ alebo $f(n) \asymp g(n)$ (*f sa rádovo rovná g*), ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(f(n))$.

(*iv*) $f(n) = o(g(n))$ (*f rastie pomalšie ako g*), ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

(*v*) $f(n) = \omega(g(n))$ (*f rastie rýchlejšie ako g*), ak $g(n) = o(f(n))$.

(*vi*) $f(n) \sim g(n)$ (*f sa asymptoticky rovná g*), ak $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Uvedenú definíciu možno rozšíriť aj na funkcie $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – v takom prípade je možné študovať asymptotické vlastnosti funkcií nielen pre $x \to \infty$, ale aj pre $x \to a$, kde a je ľubovoľný prvok rozšírenej reálnej osi.

Aj keď je horeuvedená definícia sformulovaná pre ľubovoľné $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, zvyčajne budeme pracovať s funkciami, ktoré sú nezáporné pre všetky alebo takmer všetky n. (Hovoríme, že nejaké tvrdenie platí *pre takmer všetky* $n \in \mathbb{N}$, ak platí pre všetky $n \in \mathbb{N}$ až na konečný počet výnimiek. Inak povedané, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že vlastnosť platí pre všetky $n \geq n_0$.) V takom prípade možno bod (*i*), a teda aj bod (*ii*), preformulovať aj bez použitia absolútnych hodnôt.

→ **Úloha 1.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n^3 - 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = O(n^3)$.

b) $n^3 - 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = \Theta(n^3)$.

c) $n^3 - 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 = o(n^3)$.

d) $n^3 - 5n^2 + \frac{1}{2}n + 4 \sim n^3$.

→ **Úloha 2.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n^2 = O(n^3)$.

b) $n^2 = \Theta(n^3)$.

c) $n^2 = o(n^3)$.

d) $n^2 \sim n^3$.

Úloha 3. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2 \log n = O(\log n)$.

b) $2 \log n = \Theta(\log n)$.

c) $2 \log n = o(\log n)$.

d) $2 \log n \sim \log n$.

Úloha 4. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2 \log n = O(n)$.

b) $2 \log n = \Theta(n)$.

c) $2 \log n = o(n)$.

d) $2 \log n \sim n$.

Úloha 5. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^{n+1} = \Theta(2^n)$.

b) $2^{2n} = \Theta(2^n)$.

Úloha 6. Nech $x, y \in \mathbb{R}$. Ak $n^x = \Theta(n^y)$, tak $x = y$. Dokážte.

→ **Úloha 7.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^n + (-1)^n 2^n = O(2^n)$.

b) $2^n + (-1)^n 2^n = \Theta(2^n)$.

Úloha 8. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n \cdot 2^n = O(2^n)$.

b) $n \cdot 2^n = \Omega(2^n)$.

c) $n \cdot 2^n = o(2^n)$.

d) $n \cdot 2^n = \omega(2^n)$.

Úloha 9. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n! = O(2^n)$.

b) $2^n = O(n!)$.

→ **Úloha 10.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $n! = O(n^n)$.

b) $n^n = O(n!)$.

→ **Úloha 11.** Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\log n = O(\sqrt{n})$.

b) $\log n = \Theta(\sqrt{n})$.

c) $\log n = o(\sqrt{n})$.

d) $\log n \sim \sqrt{n}$.

Úloha 12. Dokážte alebo vyvráťte: $F_n = \Theta([(1+\sqrt{5})/2]^n)$.

Úloha 13. Zistite, či existuje konštanta $a \in \mathbb{R}$ taká, že $\log n = \Theta(n^a)$.

Úloha 14. Nech $f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sú funkcie. Dokážte alebo vyvráťte:

→ a) Ak $f(n) = O(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.

→ b) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) = O(g(n))$.

c) Ak $f(n) = \omega(g(n))$, tak $f(n) = \Omega(g(n))$.

d) Ak $f(n) = \Theta(g(n))$, tak $f(n) \sim g(n)$.

e) Ak $f(n) \sim g(n)$, tak $f(n) = \Theta(g(n))$.

→ f) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) \neq \Omega(g(n))$.

→ g) Ak $f(n) \neq \Omega(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.

h) Ak $f(n) \leq g(n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $f(n) = O(g(n))$.

→ i) Ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(h(n))$, tak $f(n) = O(h(n))$.

j) Ak $f(n) = o(g(n))$ a zároveň $g(n) = o(h(n))$, tak $f(n) = o(h(n))$.

k) Ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $f(n) \neq \Theta(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.

Úloha 15. Nech $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sú funkcie. Dokážte, že $f(n) = o(g(n))$ práve vtedy, keď pre všetky $c > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $|f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.

Úloha 16. Nech $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f(n) = O(2^n)$. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^n + |f(n)| = O(2^n)$.

b) $|2^n - |f(n)|| = O(2^n)$.

Úloha 17. Nech $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je funkcia taká, že $f(n) = \Theta(2^n)$. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $2^n + |f(n)| = \Theta(2^n)$.

b) $|2^n - |f(n)|| = \Theta(2^n)$.

Odhadnúť funkciu $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s presnosťou $O(g(n))$ znamná nájsť takú funkciu h, pre ktorú platí $f(n) = h(n) + O(g(n))$. Presnejšie tu ide o *absolútnu presnosť*. Existuje ešte odhad s relatívnou presnosťou, kedy f vyjadríme v tvate $f(n) = h(n)(1 + O(g(n)))$.

→ **Úloha 18.** Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \Theta(n^4).$$

Úloha 19. (*) Dokážte, že platí

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \Theta(\log n).$$

→ **Úloha 20.** Odhadnite nasledovné funkcie s požadovanou presnosťou.

a) $(2n^4 + 3n^3 - 5n^2 - 2n + 4)(2n^3 - 3n^2 + 42 - 7)$ s presnosťou $O(n^4)$

b) $(2n + n^3)^{42}$ s presnosťou $O(n^{120})$

c) $n^{\underline{17}}$ s presnosťou $O(n^{15})$

d) $(3n^5 - 2n^4 + O(n^3))(n^6 + 2n^5 + O(n^4))$ s presnosťou $O(n^9)$

Ako dokazovať asymptotické odhady súm?

1. Upraviť sumu na uzavretý tvar (bez sumy) a spraviť odhad preň.
2. Odhadnúť každý člen samostatne, ideálne nezávisle na sumačnej konštante (napr. $\sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \sum_{k=1}^{n} n^3$). Pri dolnom odhade sa často oplatí zdola odhadnúť polovicu členov sumy ($\sum_{k=1}^{n} k^3 \geq \sum_{k=n/2}^{n} (n/2)^3$).
3. Spraviť dolný a horný odhad pomocou integrálu.

Symbol $O(g(n))$ je výhodné interpretovať ako *množinu* všetkých funkcií $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takých, že $f(n) = O(g(n))$. Formálne korektnejšie by teda bolo namiesto $f(n) = O(g(n))$ písať $f(n) \in O(g(n))$; tento spôsob zápisu ale veľmi rozšírený nie je. Podobne interpretujeme aj symboly $\Omega(g(n)), \Theta(g(n)), o(g(n))$ a $\omega(g(n))$.

Nech teraz A je ľubovoľná množina a $\circ$ je ľubovoľná binárna operácia na prvkoch množiny A. Pre $a \in A$ a $B \subseteq A$ potom pod zápisom $a \circ B$ chápeme množinu

$$a \circ B = \{a \circ b \mid b \in B\}.$$

Podobne, pre $B, C \subseteq A$ chápeme pod zápisom $B \circ C$ množinu

$$B \circ C = \{b \circ c \mid c \in C\}.$$

V tomto duchu treba chápať aj zápisy ako $f(n) + O(g(n))$ alebo $O(f(n)) + O(g(n))$.

K úlohám 13 a 14:

Veta 1. *Nech $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sú funkcie. Potom platí*

b) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) = O(g(n))$.

c) Ak $f(n) = \omega(g(n))$, tak $f(n) = \Omega(g(n))$.

e) Ak $f(n) \sim g(n)$, tak $f(n) = \Theta(g(n))$.

f) Ak $f(n) = o(g(n))$, tak $f(n) \neq \Omega(g(n))$.

h) Ak $f(n) \leq g(n)$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $f(n) = O(g(n))$.

i) Ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $g(n) = O(h(n))$, tak $f(n) = O(h(n))$.

j) Ak $f(n) = o(g(n))$ a zároveň $g(n) = o(h(n))$, tak $f(n) = o(h(n))$.

Nasledovné vlastnosti (ktoré očakávame od usporiadaní) však vo všeobecnosti neplatia:

d) Ak $f(n) = \Theta(g(n))$, tak $f(n) \sim g(n)$. ($f(n) = 1$, $g(n) = 2$)

g) Ak $f(n) \neq \Omega(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.

k) Ak $f(n) = O(g(n))$ a zároveň $f(n) \neq \Theta(g(n))$, tak $f(n) = o(g(n))$.
($f(n) = 0$ pre párne n, inak 1; $g(n) = 2$)

14a) $f(n) = O(g(n))$ alebo $g(n) = O(f(n))$. ($f(n) = 0$ pre párne n, inak 1; $g(n) = 1$ pre párne n, inak 0.)