Cvičenie 10: Grafy I – základné pojmy

Definícia 1. *Graf* je dvojica $G = (V, E)$, kde V je neprázdna konečná množina a

$$E \subseteq \binom{V}{2}.$$

Prvky množiny V nazývame *vrcholmi*, prvky množiny E nazývame *hranami.*

Ak v grafe $G = (V, E)$ pre nejaké (nie nutne rôzne) vrcholy $u, v \in V$ a hranu $e \in E$ platí $e = \{u, v\}$, hovoríme, že *hrana e je incidentná s vrcholmi u a v*. Pod *rádom grafu* rozumieme počet prvkov množiny V.
Uvedená terminológia nie je úplne ustálená a môže sa od zdroja k zdroju líšiť. Takto definovaný pojem „graf“ sa napríklad často označuje ako jednoduchý graf; niektoré hrany pripúšťajú násobné / paralelné hrany (multigrafy), slučky vo vrcholoch alebo orientované hrany.

Definícia 2. Nech $G = (V, E)$ je graf a $k \in \mathbb{N}$. Graf G je *k-regulárny*, ak pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) = k$. Graf G je regulárny, ak je k-regulárny pre nejaké k.

Úloha 1. Rozhodnite, či existuje graf, ktorého vrcholy majú stupne:

→ a) 4, 3, 2, 2, 1, 0;

b) 4, 2, 2, 2, 1, 1;

→ c) 6, 4, 3, 3, 2, 2, 1;

→ d) 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;

e) 6, 6, 5, 4, 2, 2, 1;

→ f) 8, 7, 7, 6, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1.

→ **Úloha 2.** Dokážte, že v každom jednoduchom grafe, ktorý má aspoň dva vrcholy, existujú aspoň dva vrcholy s rovnakým stupňom.

→ **Úloha 3.** Nájdite všetky dvojice $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ také, že existuje aspoň jeden k-regulárny jednoduchý graf rádu n.

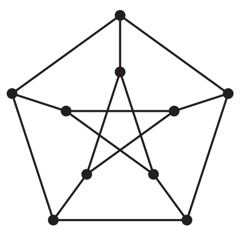
→ **Úloha 4.** Nech $n \geq 1$ je prirodzené číslo. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$.

Úloha 5. Nech $n, k \geq 1$ sú prirodzené čísla. Nájdite počet všetkých jednoduchých grafov na množine vrcholov $V = \{1, \ldots, n\}$, ktoré majú práve k hrán.

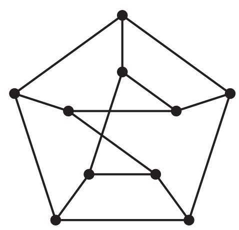
Úloha 6. Nájdite všetky navzájom neizomorfné 3-regulárne grafy rádu 6.

→ **Úloha 7.** Zistite, ktoré z nasledujúcich grafov sú izomorfné.

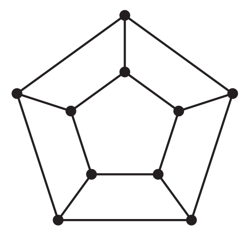
a)

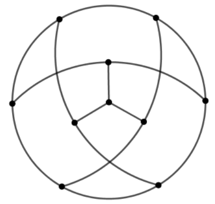


b)

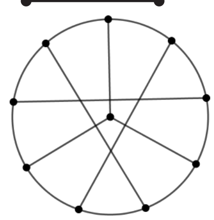


c)

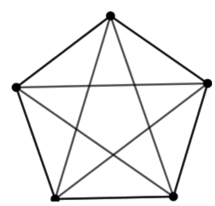




d)



e)



f)

→ **Úloha 8.** Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq (n-1)/2$. Dokážte, že graf G musí byť nutne súvislý.

Úloha 9. Nech $G = (V, E)$ je jednoduchý graf rádu n taký, že pre každú dvojicu nesusedných vrcholov u, v platí $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n - 1$. Dokážte, že G musí byť nutne súvislý.

→ **Úloha 10.** Dokážte, že ľubovoľné dve najdlhšie cesty v súvislom grafe majú spoločný vrchol. Majú aj spoločnú hranu?

→ **Úloha 11.** Nech $G = (V, E)$ je ľubovoľný graf. Dokážte alebo vyvráťte:

a) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

b) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-ťah, tak existuje aj cesta začínajúca v u a končiaca vo v.

c) Ak pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje u-v-sled, tak existuje aj ťah začínajúci v u a končiaci vo v.

d) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý sled nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

e) Ak pre vrchol $u \in V$ existuje uzavretý ťah nenulovej dĺžky prechádzajúci cez u, tak existuje aj kružnica prechádzajúca cez u.

Úloha 12. Dokážte, že ak graf $G = (V, E)$ obsahuje aspoň jeden uzavretý sled nepárnej dĺžky, tak obsahuje aj kružnicu nepárnej dĺžky.

→ **Úloha 13.** Nech $G = (V, E)$ je graf taký, že pre všetky $v \in V$ platí $\deg_G(v) \geq 2$. Dokážte, že graf G musí nutne obsahovať kružnicu.

Úloha 14. Dokážte, že v ľubovoľnom 2-regulárnom grafe leží každý vrchol na práve jednej kružnici.

Úloha 15. Popíšte všetky grafy, ktoré neobsahujú žiadnu cestu dĺžky 3.

→ **Úloha 16.** Dokážte, že každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$ a kružnicu dĺžky aspoň $\delta(G) + 1$ (pre $\delta(G) \geq 2$), kde $\delta(G)$ je najmenší stupeň grafu.

Úloha 17. Nech $n \geq 1$. Nájdite najmenšie $k(n) \in \mathbb{N}$ také, že všetky jednoduché grafy rádu n s $k(n)$ hranami sú súvislé.

→ **Úloha 18.** Dokážte, že komplementárny graf k nesúvislému grafu je súvislý. (Komplementárny graf grafu G je taký graf G', pre ktorý platí $V(G') = V(G)$ a $E(G') = \binom{V}{2} - E(G)$.)

Úloha 19. Dokážte, že

a) pre každý jednoduchý graf o n vrcholoch, e hraných a k komponentoch platí $n - k \leq e \leq (n - k + 1)(n - k)/2$ a

b) pre všetky l také, že $n-k \leq l \leq (n-k+1)(n-k)/2$ existuje graf o n komponentoch, l hranách a k komponentoch.

Riešenia

1. Neexistujú:
c) nemôže mať tri vrcholy nepárneho stupňa
d) vrchol stupňa 7 má len 6 ďalších, s ktorými môže byť spojený
e) dva vrcholy stupňa 6 musia byť spojené s každým ostatným, čo poruší stupeň 1. f) z vrcholov stupňov 8, 7, 7, 6 vychádza aspoň $5+4+4+3 = 16$ hrán, ale do zvyšných vrcholov môže vchádzať najviac $3+2+2+2+2+2+1 = 14$ hrán

2. Graf rádu n nemôže mať vrchol stupňa 0 a aj $n - 1$.

3. Musí platiť $n > k$ a ak n je nepárne, tak k musí byť párne.

4. $2^{n(n-1)/2}$

5. $\binom{n(n-1)/2}{k}$

6. $K_{3,3}$ a K_4, kde sme jeden vrchol nahradili trojuholníkom.

7. Triedy izomofných grafov sú {a), d), e)}, {b)}, {c)}, {f)}
f) obsahuje ako jediný 5 vrcholov
b), c) obsahujú kružnice dĺžky 4, pričom v grafe c) sa každá hrana nachádza v nejakej kružinici dĺžky 4.

8. Každé dva nesusedné vrcholy majú spoločného susesda.

9. Podobne ako predchádzajúca úloha.

10. Spojnica najdlhších ciest ich rozdelí každú na dva úseky. Zoberte dlhšie z nich. Hranu nemusia mať spoločnú.

11. a) Áno – zoberte si najkratší u-v-sled, ktorý nie je cestou a nájdite kratší
b) Áno, je to dôsledok a)
c) Áno, je to dôsledok a).
d) Nie – Napr. ťah u, x, u.
e) Nie – Napr. sled u, x, u.

12. Nájdite v ňom kružnicu. Ak má párnu dĺžku, tak využite vo zvyšku sledu indukčný predpoklad.

14. Ak by ležal na viacerých, tak vrchol, v ktorom sa kružnice rozpoja, má veľký stupeň.

15. Grafy, v ktorých každý komponent je buď C_3, alebo hviezda – graf, kde je jeden vrchol spojený s hranou s ďalšími i vrcholmi (a žiadne iné hrany neobsahuje), $i \geq 0$

16.

17. $(n-1)(n-2)/2$: ak má jeden komponent veľkosť a, tak graf môže mať najviac $a(a-1)/2+(n-a)(n-a-1)/2 = 2a^2-2an+n(n-1)/2$ hrán, čo nadobúda maximum pre $a=1$ a $a=n-1$. Dosiahne sa na grafe $K_{n+1}+$ izolovaný vrchol.

18.

Riešenie úlohy 11a)

Ukážka dvoch spôsobov, ako spisovať dôkazy, kde opakujeme nejaký krok. Hlavná myšlienka je vyznačená modrou, spoločná pre obe riešenia.

Matematická indukcia

Nech u, v sú vrcholy grafu G. Matematickou indukciou podľa n dokážeme, ža ak v grafe G existuje u-v-sled dĺžky n, tak existuje v ňom aj u-v-cesta. Pre $n=0$ tvrdenie zjavne platí (sled (u) je aj cestou).

Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky $n<k$, pre nejaké $k>0$. Ukážeme, že tvrdenie platí aj pre $n=k$. Nech teda $P=(u=v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,v_{k-1},e_k,v_k=v)$ je u-v sled dĺžky k. Ak sa v ňom neopakujú vrcholy, tak ide o cestu a dôkaz je hotový. Predpokladajme teda, že sled P nie je cestou, teda že pre nejaké $i<j$ platí $v_i=v_j$. Potom $P'=(v_0,e_1,v_1,\ldots,e_i,v_i=v_j,e_{j+1},\ldots,v_{k-1},e_k,v_k)$ je u-v-sled dĺžky kratšej ako k. Preto podľa indukčného predpokladu existuje u-v-cesta v grafe G. Tým je dôkaz indukciou dokončený

Extremálny princíp

Nech u, v sú vrcholy grafu G a nech $P=(u=v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,v_{k-1},e_k,v_k=v)$ je najkratší u-v-sled grafu G (ktorý existuje, keďže aspoň jeden u-v-sled v grafe G máme). Predpokladajme teda, že sled P nie je cestou, teda že pre nejaké $i<j$ platí $v_i=v_j$. Potom $P'=(v_0,e_1,v_1,\ldots,e_i,v_i=v_j,e_{j+1},\ldots,v_{k-1},e_k,v_k)$ je u-v-sled dĺžky kratšej ako k. To je v spore s tým, že P je najkratší u-v-sled. Preto P musí byť cesta.