Cvičenie 12: Grafy III – planárne grafy a súvislosť

Planárne grafy

Definícia 1. Súvislý graf $G = (V, E)$ je *planárny*, ak sa dá nakresliť do roviny bez kríženia hrán.

Definícia 2. Nech súvislý graf $G = (V, E)$ je nakreslený do roviny (*rovinný graf*). Oblasť rovinného grafu G je plocha ohraničená hranami grafu G. *Veľkosť oblasti* je dĺžka najkratšieho uzavretého sledu obsahujúceho hrany ohraničujúce oblasť.

Veta 1 (Eulerova formula)**.** *Nech $G = (V, E)$ je súvislý rovinný graf a nech F je množina jeho oblastí. Potom platí*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

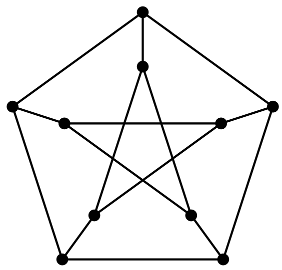
Úloha 1. Nájdite planárny graf, ktorý má dve rôzne nakreslenia. To znamená, že sa dá nakresliť dvomi rôznymi spôsobmi tak, že veľkosti oblastí jedného nakreslenia sú iné ako veľkosti oblastí druhého nakreslenia.

Úloha 2. Dokážte, že kompletný bipartitný graf $K_{2,n}$ je planárny pre všetky n. Aký môže mať počet oblastí?

Úloha 3. Sú grafy K_4, K_5 a $K_{3,3}$ planárne?

Úloha 4. Odvoďte odhad na počet hrán planárneho grafu, ktorý neobsahuje trojuholník.

Úloha 5. Dokážte, že Petersnov graf nie je planárny.



Úloha 6. Dokážte, že každý planárny graf má vrchol stupňa najviac 5.

Úloha 7. (*) Nájdite všetky platónske telesá. Sú to súvislé rovinné grafy, pre ktoré platí, že všetky ich oblasti majú rovnakú veľkosť a všetky vrcholy majú rovnaký stupeň.

Súvislosť

Úloha 8. Nájdite príklady grafov, pre ktoré platí:

1. $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$,
2. $\kappa(G) < \lambda(G) = \delta(G)$,
3. $\kappa(G) = \lambda(G) < \delta(G)$.

Úloha 9. Dokážte, že 3-regulárny bipartitný graf je hranovo 2-súvislý. Aj aj vrcholovo 2-súvislý?

Úloha 10. Dokážte, že ak graf G je vrcholovo k-súvislý, tak potom aj hranový graf $L(G)$ je vrcholovo k-súvislý.

Úloha 11. Nech G je k-súvislý graf a nech H je graf, ktorý vznikne z G pridaním nového vrcholu v a k hrán medzi ním a vrcholmi G. Dokážte, že H je k-súvislý.

Úloha 12. Graf má k navzájom hranovo disjunktných kostier práve vtedy, keď je hranovo k-súvislý.

1. Platí tvrdenie pre všetky $k \geq 1$?
2. Ak nie, platí niektorá implikácia?
3. Pre ktoré k platí?

4. Ako sa zmení jeho platnosť, ak hranovú súvislosť nahradíme za vrcholovú?

Úloha 13. Určte, ktoré z nasledovných tvrdení sú ekvivalentné. Pre tie, ktoré nie sú ekvivalentné, rozhodnite, či medzi nimi platí implikácia niektorým smerom. Všetky implikácie a ekvivalencie berieme pre všetky grafy G s aspoň tromi vrcholmi.

(1) G je vrcholovo 2-súvislý.

(2) G je hranovo 2-súvislý.

(3) Každý vrchol grafu G leží na kružnici.

(4) Každá hrana grafu G leží na kružnici.

(5) Každé dva vrcholy grafu G ležia na spoločnej kružnici.

(6) Ľubovoľný vrchol a ľubovoľná hrana grafu G ležia na spoločnej kružnici.

Riešenia

2. n vrcholov dajte do stredu medzi dva vrcholy. Má vždy n oblastí.

5. Obsahuje subdivíziu K_5 alebo aj $K_{3,3}$.

6. Sporom. Mal by priveľa hrán.

7. `https://sk.wikipedia.org/wiki/Plat%C3%B3nske_teleso` + podľa tejto definície aj kružnice.

8. Napr: 1. Úplný graf, 2. dve kružnice so spoločným vrcholom, 3. dve kružnice spojené mostom.

9. V oboch prípadoch áno. Zoberieme si komponent, v ktorom chýba a spočítame počet hrán dvomi spôsobmi podľa počtu vrcholov v jednej partícii

10. Platí $L(G) - \{e_1, \ldots, e_{k-1}\} = L(G - \{e_1, \ldots, e_{k-1}\})$ a graf $G - \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ je súvislý.

11. Odstráňte z H k vrcholov. Rozlíšte, či ste odstránili v.

12. 1. Neplatí – napr. cykly sú 2-súvislé a nemajú dve h. disj. kostry.
2. Implikácia $\Rightarrow$ platí. Pri odstránení $< k$ hrán ostane jedna kostra neporušená.
3.
4. Platí len pre $k = 1$. Disjunktnosť kostier nevylučuje prítomnosť artikulácie.

13. Je tam skrytých zopár chytákov, kedy treba ošetriť platnosť implikácie ešte nejakou drobnou podmienkou. Niektoré možno aj neúmyselne.

$[(1) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (6) \Leftrightarrow (7*)] \Rightarrow (2) \Rightarrow (4^*) \Rightarrow (3)$,
kde podmienky s hviezdičkou vzniknú pridaním dodatočnej podmienky, že $\delta(G) \geq 1$. Bez tohto totiž $(4) \not\Rightarrow (3)$ a $(7) \not\Rightarrow (1)$.