Riešenia sady domácich úloh z UKTG č. 1

1. úloha

Koľko najmenej rôznych čísel musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovala dvojica čísel, ktorých rozdiel je zložené číslo? Vaše tvrdenie dokážte.

Poznámka. Zložené číslo je také číslo, ktoré má aspoň troch kladných deliteľov.

Pre prehľadnosť označme $M = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Riešenie úlohy označme x. Hodnotu x môžeme odhadovať zhola aj zhora. Tieto dve časti môžeme robiť v ľubovoľnom poradí. Dokonca môžeme medzi nimi prebiehať.

Horný odhad

Pozrieme sa na to, koľko čísel nám bude stačiť. Keďže tu máme ukazovať, že pre výbere x čísel ***existujú dve*** *čísla, ktorých rozdiel je zložené číslo, tak použijeme Dirichletov princíp. Na to si potrebujeme množinu všetkých čísel M rozdeliť na čo najmenej podmnožín (holubníkov) s vlastnosťou, že ľubovoľné dve čísla z podmnožiny (holubníka) majú rozdiel zložené číslo.*

Skúsme tvoriť holubníky postupne. S ktorým číslom bude číslo 1? Nemôže byť s 2, s 3 ani so 4. Dajme k jednotke teda číslo 5. Ktoré číslo tam môžeme dať ďalej? Najbližšie je 9, lebo rozdiely $9-5=4$ aj $9-1=8$ sú zložené. Ďalej vieme pridať aj číslo 13, lebo $13-9=4$, $13-5=8$ aj $13-1=12$ sú zložené. Takto sa dostaneme k číslam $\{1, 5, 9, 13, \ldots, 97\}$, ktoré tvoria vyhovujúci holubník. Podobne nájdeme aj ďalšie holubníky $\{2, 6, \ldots, 98\}$, $\{3, 7, \ldots, 99\}$ a $\{4, 8, \ldots, 100\}$ – teda vlastne sme rozdelili čísla z M do 4 holubníkov na základe ich zvyšku po delení štyrmi.

Ak teda z M vyberieme 5 čísel, tak podľa Dirichletovho prinípu existujú aspoň dve čísla z jedného holubníka. Tieto dve čísla majú rovnaký zvyšok po delení 4, preto ich rozdiel je deliteľný 4. To znamená, že ich rozdiel je zložené číslo. Vybrať 5 čísel nám teda stačí. Máme tak $x \geq 5$. Táto časť riešenia však sama o sebe nevylučuje, žeby sme dve čísla so zloženým rozdielom nenašli aj pri menej ako 5 vybraných číslach.

Dolný odhad

Ako ukážeme, že vybrať y čísel z množiny M nám nezaručuje existenciu dvoch s rozdielom rovným zloženému číslu? Nájdeme konkrétny výber y čísel z M, kde taký zložený rozdiel nie je. Chceme teda nájsť čo najviac čísel z množiny M ta, aby sme medzi nimi nemali dvojicu, ktorej rozdiel bude zložené číslo. Aj keď takúto skupinu čísel začneme hľadať postupne, tak nájdeme čísla 1, 2, 3, 4. Najväčší rozdiel, čo vieme z nich dostať je $4-1=3$, no najmenšie zložené číslo je až 4. Preto medzi číslami 1, 2, 3, 4 nie sú dve so zloženým rozdielom. Teda pre splnenie úlohy potrebujme vybrať z M aspoň 5 čísel.

Toto nám vraví, že $x \geq 5$. Opäť, táto časť sama o sebe nezaručuje, že ak máme 5 čísel, tak isto dvojicu so zloženým rozdielom nájdeme.

Riešenie

Ukážeme, že hľadaný najmenší počet čísel, ktoré treba vybrať z M, je 5.

Ak vyberieme 4 alebo menej čísel z množiny M, tak môžeme vybrať čísla 1, 2, 3, 4 (resp. ich podmnožinu). Vidíme, že žiadne dve z nich nemajú rozdiel zložené číslo. Preto musíme z M vybrať aspoň 5 čísel.

Nech teda máme z M vybraných 5 čísel. Rozdeľme si množinu M na 4 podmnožiny

$$\{4k+1;\ k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 24\}, \{4k+2;\ k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 24\}, \{4k+3;\ k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 24\}, \{4k+4;\ k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 24\}.$$

Keďže $5 > 4$, tak z Dirichletovho princípu aspoň dve z vybraných čísel, označme ich a, b, sa nachádzajú v rovnakej množine. Keďže čísla z rovnakej množiny majú rovnaké zvyšky po delení štyrmi, tak $4 \mid a - b$. To znamená, že $a - b$ je zložené číslo, čím sme ukázali, že vždy vieme nájsť dve čísla s rozdielom rovným zloženému číslu.

Iné riešenie

Tretí odsek predošlého riešenia možno zapísať aj nasledovne

Nech teda máme z M vybraných 5 čísel. Keďže máme len 4 zvyšky po delení štyrmi a $5 > 4$, z Dirichletovho princípu existujú dve vybrané čísla a, b s rovnakým zvyškom po delení štyrmi. Preto $4 \mid a - b$ a teda rozdiel $a - b$ je zložené číslo. Tým sme ukázali, že vždy vieme nájsť dve čísla s rozdielom rovným zloženému číslu.

Ak by sme chceli použitie Dirichletovho princípu sformulovať cez zobrazenia, tak v tomto riešené v podstate uvažujeme zobrazenie z 5*-prvkovej množiny vybraných čísel, ktoré im priraďuje ich zvyšky po delení štyrmi, ktoré majú* 4 *možné hodnoty.*

2. úloha

Dokážte, že každé prirodzené číslo možno zapísať ako súčet niekoľkých navzájom rôznych Fibonacciho čísel.

Fibonacciho čísla $F_0, F_1, F_2, \ldots$ sú definované nasledovne: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pre všetky celé čísla $n \geq 2$ platí $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Zápis $2 = F_1 + F_2$ nepovažujeme ako súčet navzájom rôznych Fibonacciho čísel, nakoľko $F_1 = F_2$.

Tvrdenie dokážeme úplnou matematickou indukciou.

Báza. Pre $n = 0$ vyjadríme číslo 0 ako súčet 0 Fibonacciho čísel, resp. ako $0 = F_0$.

Indukčný krok. Vezmime si teraz $n \geq 1$ a predpokladajme, že

IP: Každé číslo menšie ako n vieme zapísať ako súčet navzájom rôznych Fibonacciho čísel.

Dokážme, že aj n vieme tak zapísať. Nech k je najväčšie prirodzené číslo, pre ktoré platí $F_k \leq n$ – také zjavne existuje, nakoľko berieme maximum z neprázdnej (lebo $F_2 = 1 \leq n$), ohraničenej (pomocou n) množiny. Nakoľko $n \geq F_2$, tak máme $k \geq 2$. Keďže $n - F_k < n$, tak z indukčného predpokladu vieme číslo $n - F_k$ zapísať ako súčet navzájom rôznych Fibonacciho čísel. Ak k nim pridáme číslo F_k, dostaneme vyjadrenie čísla n ako súčet Fibonacciho čísel.

$$n = \text{vyjadrenie } n - F_k \text{ cez Fibonacciho čísla} + F_k.$$

Ukážeme, že vyjadrenie $n - F_k$ neobsahuje číslo F_k. Pre spor predpokladajme opak. Potom

$$n - F_k \geq F_k.$$

S využitím toho, že Fibonacciho postupnosť je neklesajúca, teda $F_k \geq F_{k-1}$ pre všetky $k \geq 1$, máme

$$n \geq F_k + F_k \geq F_k + F_{k+1} = F_{k+1}.$$

Tak sme zistili, že $F_{k+1} \leq n$. To je spor s tým, že k je najväčšie také číslo, pre ktoré $F_k \leq n$. Teda naše vyjadrenie čísla n obsahuje navzájom rôzne Fibonacciho čísla, čím je indukčný krok dokončený.

Dôkaz toho, že Fibonacciho postupnosť je neklesajúca, sme nevyžadovali. Avšak je to tiež dobrý tréning dokazovania. Môžete si skúsiť. Totiž priamo z ich definície to nevyplýva. Vyplýva to však z toho, že Fibonacciho čísla sú nezáporné, čo sa ľahko dokáže indukciou.

3. úloha

Nech $C = \{0, 1, 2, 4, 7, 8\}$.

a) *(0,4 boda)* Koľko existuje 5-ciferných čísel zložených z cifier z množiny C (môžu sa aj opakovať)?

b) *(0,6 bodov)* Koľko existuje čísel z podúlohy a), ktoré obsahujú za sebou idúce cifry 427?

c) *(1 bod)* Koľko existuje čísel z podúlohy a), v ktorých sú každé dve susedné cifry rôzne? (Takým číslom je napr. 42470, ale nie 42247.)

Vaše tvrdenia poriadne formálne dokážte.

a) Nech

$$M_a = (C - \{0\}) \times C^4 = (C - \{0\}) \times C \times C \times C \times C.$$

Podľa pravidla súčinu máme

$$|M_a| = |(C - \{0\}| \cdot |C|^4) = 5 \cdot 6^4.$$

Zobrazenie, ktoré každej usporiadanej pätici (a, b, c, d, e) priradí číslo $\overline{abcde}$ je zjavne bijekcia z množiny M_a do množiny všetkých 5-ciferných čísel zložených z cifier z C. Preto takých čísel je $5 \cdot 6^4$.

b) Opäť čísla budeme reprezentovať usporiadanými 5-ticami cifier. Možnosti si rozdelíme podľa výskytu úseku cifier 427. Nech teda

$$M_b = \{4\} \times \{2\} \times \{7\} \times C \times C \cup (C - \{0\}) \times \{4\} \times \{2\} \times \{7\} \times C \cup (C - \{0\}) \times C \times \{4\} \times \{2\} \times \{7\}.$$

Keďže usporiadaná 5-tica môže obsahovať najviac jeden súvislý úsek $(4, 2, 7)$, tak M_b je zjednotením troch disjunktných množín. Preto podľa pravidla súčtu máme

$$|M_b| = |\{4\} \times \{2\} \times \{7\} \times C \times C| + |(C - \{0\}) \times \{4\} \times \{2\} \times \{7\} \times C| + |(C - \{0\}) \times C \times \{4\} \times \{2\} \times \{7\}|,$$

čo podľa pravidla súčinu je

$$|M_b| = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 + 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6^2 + 2 \cdot 5 \cdot 6 = 96.$$

Zjavne existuje bijekcia z množiny M_b do množiny hľadaných riešení (ide o zúženie bijekcie z a)), ktorých je teda tiež 96.

c) Nech M_c je množina usporiadaných 5-tíc $(a, b, c, d, e) \in C^5$, kde

- $a \in C - \{0\}$, kde $|C - \{0\}| = 5$;
- $b \in C - \{a\}$, kde $|C - \{a\}| = 5$ pre každú voľbu a;
- $c \in C - \{b\}$, kde $|C - \{b\}| = 5$ pre každú voľbu b;
- $d \in C - \{c\}$, kde $|C - \{c\}| = 5$ pre každú voľbu c;
- $e \in C - \{d\}$, kde $|C - \{d\}| = 5$ pre každú voľbu d.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu

$$|M_c| = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 3\,125.$$

Opäť zjavne existuje bijekcia medzi M_c a množinou hľadaných riešení.