

Sada domácich úloh z UKTG č. 1

Termín: streda 15. 3. 2022, 23:59

Ak odovzdávate úlohu fyzicky, odovzdajte úlohu 1 na samostatnom papieri.

Úloha 1. (2 body) Koľko najmenej rôznych čísel musíme vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, 100\}$, aby medzi vybranými číslami zaručene existovala dvojica čísel, ktorých rozdiel je zložené číslo? Vaše tvrdenie dokážte.

Poznámka. Zložené číslo je také číslo, ktoré má aspoň troch kladných deliteľov.

Úloha 2. (2 body) Dokážte, že každé prirodzené číslo možno zapísať ako súčet niekoľkých navzájom rôznych Fibonacciho čísel.

Fibonacciho čísla F_0, F_1, F_2, \dots sú definované nasledovne: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pre všetky celé čísla $n \geq 2$ platí $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Zápis $2 = F_1 + F_2$ nepovažujeme ako súčet navzájom rôznych Fibonacciho čísel, nakoľko $F_1 = F_2$.

Úloha 3. (2 body) Nech $C = \{0, 1, 2, 4, 7, 8\}$.

- a) (0,4 boda) Koľko existuje 5-ciferných čísel zložených z cifier z množiny C (môžu sa aj opakovať)?
- b) (0,6 bodov) Koľko existuje čísel z podúlohy a), ktoré obsahujú za sebou idúce cifry 427?
- c) (1 bod) Koľko existuje čísel z podúlohy a), v ktorých sú každé dve susedné cifry rôzne? (Takým číslom je napr. 42470, ale nie 42247.)

Vaše tvrdenia poriadne formálne dokážte.