Riešenia sady domácich úloh z UKTG č. 1

1. úloha

Na Matfyze je 100 (rozlíšiteľných) študentov a 40 učební očíslovaných od 1 po 40. Koľkými spôsobmi možno rozdeliť študentov do učební, ak

a) *(0,3 b)* nie sú žiadne obmedzenia;

b) *(0,7 b)* Janko a Marienka majú byť v rovnakej učebni;

c) *(1 b)* v učebni 17 má byť aspoň jeden študent;

d) *(1 b)* v učebni 1 má byť práve 5 študentov a v učebni 2 má byť práve 10 študentov.

e) *(2,5 b)* nesmie existovať učebňa, v ktorej sú práve 3 študenti.

a) Každému študentovi vyberieme (priradíme) učebňu, do ktorej pôjde. Každý zo 100 študentov má 40 možností, teda spolu máme 40^{100} možností. (Formálne v tejto úlohe ide o zobrazenia z množiny študentov do množiny učební, teda o variácie s opakovaním.)

b) Jankovi a Marienke vyberieme spoločnú učebňu, na čo máme 40 možností. Každý zo zvyšných 98 študentov má na výber 40 učební. To nám spolu dáva 40^{99} možností.

c) Rozdelení, kde v učebni 17 nie je žiaden študent, je 39^{100} (vtedy má každý študent len 39 možností). Počet rozdelení, kde v učebni 17 je aspoň jeden študent, získame odčítaním od všetkých rozdelení: $40^{100} - 39^{100}$.

d) Uvedieme najprv riešenie, ktoré sa bude ľahko zovšeobecňovať v podúlohe e). Najskôr obsadíme učebne 1 a 2. Vyberieme usporiadanú 15-ticu študentov $(s_1, s_2, \dots, s_{15})$, ktorí budú v učebniach 1 a 2 – $100^{\underline{15}}$ možností. Prvých 5 z nich (teda s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) pošleme do učebne 1 a zvyšných 10 $(s_6, s_7, \dots, s_{15})$ do učebne 2. Študentov v učebni 1 môžeme spermutovať 5! spôsobmi a študentov v učebni 2 zas 10! spôsobmi. Každá z týchto $5! \cdot 10!$ permutácii vedie k rovnakému obsadeniu učební 1 a 2. Potom nám už ostáva len obsadiť zvyšné učebne – ostalo nám $100 - 15 = 85$ študentov a každý z nich má na výber z $40 - 2 = 38$ učební, čo nám dáva 38^{85} možností. Spolu teda máme

$$\frac{100^{\underline{15}}}{5! \cdot 10!} \cdot 38^{85} \qquad \text{možností.}$$

d) Iné riešenie Najprv zo všetkých 100 vyberieme 5 študentov do učebne 1, na čo máme $\binom{100}{5}$. Potom zo zvyšných 95 študentov vyberieme 10 študentov do učebne 2 – $\binom{95}{10}$ možností. Nakoniec každému zo zvyšných 93 študentov určíme ľubovoľnú zo zvyšných 38 učební. Spolu teda máme

$$\binom{100}{5}\binom{95}{2} \cdot 38^{93} \qquad \text{možností.}$$

Riešenie úlohy e)

Ako riešiť úlohy na PIE?

1. Ujasníme si, či chceme pomocou PIE počítať dobré alebo zlé možnosti.
2. Rozdelíme si všetky možnosti na niekoľko, povedzme n, skupiniek.
3. Vypočítame, koľko možností sa nachádza v prieniku **fixných** k skupín. Pri tom si treba uvedomiť, čo vlastne za možnosti v tomto prieniku máme, ako ich kombinatoricky opísať.

- POZOR! Pri niektorých úlohách tento výsledok nemusí závisieť iba od k, ale môže závisieť aj od toho, ktoré skupinky berieme do prieniku. Napr. úloha 1 z: `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg22/du/du3-riesenie.pdf`

4. Určíme hodnotu S_k tak, že pre dané k nasčítame výsledky z predošlého bodu cez všetky možné k-tice skupín.

5. Dosadíme hodnotu S_k do vzorca pre PIE: počítané možnosti $= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$, príp. ak sme cez PIE vyjadrovali zlé možnosti, tak môžeme rovno vypočítať dobré ako $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}S_k$

Riešenie podľa predošlého návodu

Toto riešenie ilustruje spomenutý návod aj so zopár úvodnými komentármi, ako na riešenie prísť a ako začať. Nepoužíva veľmi formálny jazyk, no stále dobre zachycuje ako funguje PIE.

1. Vieme nejako zaručiť, že neexistuje učebňa s 3 študentmi? Nebude ľahšie uvažovať možnosti, kde existuje nejaká učebňa s 3 študentmi? Existencia sa nám ľahšie uchopí, lebo si vieme možnosti rozdeliť na prípady podľa toho, v ktorej učebni sú práve 3 študenti. Budeme teda počítať zlé možnosti

2. Počítame zlé možnosti, teda možnosti rozdelenia študentov, kde existuje učebňa s práve 3 študentmi. Tieto možnosti si rozdelíme na 40 skupín. Skupina číslo i obsahuje tie možnosti, kde v miestnosti i sú 3 študenti (nevylučujeme však existenciu iných možností s 3 študentmi). Sú tieto skupinky disjunktné? Nie. Nemôžeme teda použiť pravidlo súčtu, ale použijeme PIE.

3. Uvažujme nejakých fixných k skupiniek. Koľko možností sa nachádza v ich prieniku? Ako vieme opísať, o aké možnosti ide? Ide o také možnosti, kde máme nejakých fixných k učební, v ktorých sú 3 študenti. Určme počet takýchto možností. Najprv postupne obsadíme daných k miestností. Do i-tej miestnosti ($i \in \{1, 2, \ldots, k\}$) vyberieme troch študentov spomedzi $100 - 3(i - 1)$ (lebo už $3(i - 1)$ študentov je v predošlých miestnostiach). Počet možností na tieto výbery je

$$\prod_{i=1}^{k}\binom{100-3(i-1)}{3} = \binom{100}{3}\binom{97}{3}\cdots\binom{100-3k+3}{3} = \frac{100^{\underline{3}}}{3!}\cdot\frac{97^{\underline{3}}}{3!}\cdot\cdots\cdot\frac{(100-3k+3)^{\underline{3}}}{3!} = \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k}.$$

Potom nám ostane $(100 - 3k)$ študentov, z ktorých každý má na výber ľubovoľnú zo $40 - k$ zvyšných učební. Spolu tak máme

$$\frac{100^{\underline{3k}}}{6^k}\cdot(40-k)^{100-3k} \qquad \text{možností.}$$

Vyšlo nám to teraz pekne, že tento počet možností závisí len na čísle k. Nezávisí na tom, ktorých k učební uvažujeme.

4. Určíme číslo S_k, ktoré dostaneme sčítaním výsledkov z predošlej pre všetky možné výbery k skupiniek. Takýchto výberov je $\binom{40}{k}$ a každému zodpovedá rovnaký počet možností, preto

$$S_k = \binom{40}{k}\frac{100^{\underline{3k}}}{6^k}\cdot(40-k)^{100-3k}.$$

Všimnite si, že v tomto prípade nehovoríme o možnostiach, nakoľko S_k nevyjadruje počet možností. Ide o súčet veľa čísel. V konečnom dôsledku sú niektoré možnosti v S_k započítané raz, iné dvakrát, a niektoré možno aj 17-krát.

5. Už len dosadíme do vzorca pre PIE. Môžeme rovno použiť vzorec na dobré možnosti (Dôsledok 3.22) alebo rozdiel všetkých a zlých možností. Zvolíme druhú možnosť a tak dostaneme výsledný počet možností:

$$40^{100} - \sum_{k=1}^{40}(-1)^{k+1}S_k = 40^{100} + \sum_{k=1}^{40}(-1)^k\binom{40}{k}\frac{100^{\underline{3k}}}{6^k}\cdot(40-k)^{100-3k} = \sum_{k=0}^{40}(-1)^k\binom{40}{k}\frac{100^{\underline{3k}}}{6^k}\cdot(40-k)^{100-3k}.$$

Formálnejšie riešenie

Nech pre $i \in \{1, 2, \ldots, 40\}$ M_i označuje počet takých rozdelení študentov, kde v miestnosti číslo i sú práve 3 študenti. Hľadané možnosti vieme vyjadriť ako $(M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_{40})^C$, čo je podľa Dôsledku 3.22 Princípu inklúzie a exklúzie rovné

$$\sum_{k=0}^{40}(-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |M_{i_1}\cap M_{i_2}\cap\cdots\cap M_{i_k}|. \tag{1}$$

Množina $M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}$ označuje počet rozdelení, kde v učebniach $i_1, i_2, \dots, i_k$ sú práve traja študenti. Určme teraz ich počet: Najskôr vyberieme usporiadanú $3k$-ticu študentov $(s_1, s_2, \dots, s_{3k})$, na čo máme $100^{\underline{3k}}$ možností – to budú študenti, čo sú v miestnostiach $i_1, i_2, \dots, i_k$. Študentov $s_{3j-2}, s_{3j-1}, s_{3j}$ priradíme do učebne i_j pre $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ (teda prví traja idú do učebne i_1, druhý traja do učebne i_2, ...). Nakoľko nám však nezáleží na tom, v akom poradí študentov dáme do miestnosti, každé z $3! = 6$ poradí študentov v rámci jednej miestnosti $s_{3j-2}, s_{3j-1}, s_{3j}$ vedie k rovnakému rozdeleniu. Celkovo tak máme každú možnosť započítanú 6^k-krát. Nakoniec už len každému zo zvyšných $100 - 3k$ nevybraných študentov priradíme ľubovoľnú zo zvyšných $40 - k$ miestností, na čo máme $(40-k)^{100-3k}$ možností. Spojením týchto úvah teda máme

$$|M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \cdots \cap M_{i_k}| = \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k}.$$

Teraz už len dosadíme späť do (1) a máme

$$\sum_{k=0}^{40} (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k} = \sum_{k=0}^{40} (-1)^k \binom{40}{k} \frac{100^{\underline{3k}}}{6^k} \cdot (40-k)^{100-3k},$$

čo je hľadaný počet možností.

2. úloha

Koľko existuje nerastúcich 47-prvkových postupností z čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 42\}$?

Postupnosť $(a_1, a_2, \dots, a_{47})$ je *nerastúca* ak pre všetky $i, j \in \{1, 2, \dots, 47\}$ platí: $i < j \Rightarrow a_i \ge a_j$.

Riešenie cez vzorec

Z množiny $\{1, 2, \dots, 42\}$ vyberme 47 čísel tak, že nám nezáleží na poradí a čísla môžeme vyberať opakovane. Ide o kombinácie s opakovaním, teda máme na to

$$\binom{42+47-1}{47} = \binom{88}{47} \qquad \text{možností.}$$

Pre každý takýto výber je práve jeden spôsob, ako vybrané čísla zoradiť do nerastúcej postupnosti. Preto uvedený počet možností je riešením úlohy.

Riešenie cez guľôčky a oddeľovače

Uvažujme reťazce zložené zo 47 guľôčok a 41 oddeľovačov. Takýchto reťazcov je

$$\binom{88}{47} = \binom{88}{41},$$

nakoľko vlastne potrebujeme len vybrať 47 miest z celkových 88, na ktorých budú guľôčky. Oddeľovače nám rozdelia reťazec na 42 úsekov guľôčok. Na základe tohto reťazca vytvoríme nerastúcu postupnosť čísel $\{1, 2, \dots, 42\}$ nasledovne: Začneme s prázdnou postupnosťou a postupne pre $i = 42, 41, \dots, 1$ do postupnosti pridáme toľkokrát číslo i, koľko guľôčok je v i-tom úseku. Keďže čísla pridávame v klesajúcom poradí, dostaneme nerastúcu postupnosť. Keďže guľôčok je 47, tak výsledná postupnosť má tiež 47 členov.

3. úloha

Na konferenciu prišli z každej zo 40 krajín traja vedci: matematik, fyzik a informatik. Koľkými spôsobmi ich možno rozsadiť okolo okrúhleho stola tak, aby vedci z rovnakej krajiny sedeli vedľa seba? Rozsadenia, ktoré sa líšia len otočením považujeme za rovnaké.

Najskôr určíme počet permutácií, v ktorých vedci z rovnakej krajiny sedia veľa seba. Poradie krajín možno určiť $40!$ spôsobmi. Pre každú krajinu možno ich členov rozsadiť $3! = 6$ spôsobmi. Teda takýchto rozsadení máme $40! \cdot 6^{40}$. Teraz chceme permutácie, ktoré sa líšia len cyklickým posunom považovať za rovnaké. Každú takúto permutáciu môžeme cyklicky posunúť 120-krát, ale len 40 posunutí je takých, že krajiny sú vedľa seba (vo zvyšných jedna krajina má niekoho na začiatku a niekoho na konci a také možnosti se nerátali). Každú možnosť sme teda zarátali 40-krát, preto výsledok je

$$\frac{40! \cdot 6^{40}}{40} = 39! \cdot 6^{40} \qquad \text{možností.}$$