Riešenia sady domácich úloh z UKTG č. 1

1. úloha

V závislosti od celého čísla $n \geq 0$ vyjadrite sumu

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \right)^2 .$$

Upravujme sumu:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \right)^2 = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \right)^2 =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{n+1} \cdot \binom{n+1}{k+1} \right)^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}\binom{n+1}{n-k} =$$
$$\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} \binom{n+1}{l}\binom{n+1}{n-l+1} = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{l=0}^{n+1} \binom{n+1}{l}\binom{n+1}{n+1-l} - \binom{n+1}{0}\binom{n+1}{n+1} \right).$$

Ostala nám suma, ktorú vieme priamo zjednodušiť použitím Cauchyho sčítacieho vzorca na

$$\frac{1}{n+1} \left(\binom{2n+2}{n+1} - 1 \right).$$

Poznámka. Počítanie sumy sme mohli dokončiť aj pomocou vzťahu

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 = \binom{2m}{m}$$

pre $m = n+1$ (samozrejme, s odpočítaním jednotky). Okrem toho, že ho možno dokázať priamym použitím Cauchyho sčítacieho vzorca, tak ho možno dokázať aj kombinatoricky. Uvažujme počet možností, ako vybrať m-prvkovú podmnožinu spomedzi m mužov a m žien. Zjavne na to máme $\binom{2m}{m}$ možností. Tento počet vieme vypočítať aj inak: Pre každé $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ vyberieme k mužov do skupiny a k žien, ktoré budú nevybrané – teda tak vyberieme $m-k$ žien a dostaneme celkovo m-člennú podmnožinu. Pre fixné k máme $\binom{m}{k}^2$ takýchto výberov. Tie potom len nasčítame pre všetky hodnoty k.

2. úloha

Rozhodnite, či pre ľubovoľné funkcie $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ platí $f = O(g)$ alebo $g = O(f)$. Vaše tvrdenie dokážte.

Tvrdenie neplatí. Protipríkladov sa dá nájsť veľa. Snáď aj všetky vaše protipríklady využívali funkcie, ktoré sa inak správajú na párnych a inak na nepárnych číslach. Jednoduchým protipríkladom je

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{ak } 2 \mid n, \\ 1, & \text{ak } 2 \nmid n; \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 1, & \text{ak } 2 \mid n, \\ 0, & \text{ak } 2 \nmid n. \end{cases}$$

Ukážeme, že $f \neq O(g)$: Pre hocijaké $n_0 \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{R}^+$ zvolíme $n = 2n_0 + 1 \geq n_0$ a máme

$$|f(2n_0+1)| = 1 > 0 = c|g(2n_0+1)|.$$

Podobne, $g \neq O(f)$, lebo pre každé $n_0 \in \mathbb{N}$ a $c \in \mathbb{R}^+$ zvolíme $n = 2n_0 \geq n_0$ a máme

$$|f(2n_0)| = 0 < c = c|g(2n_0)|.$$

3. úloha

> Dokážte, že platí
> $$\frac{1}{3}n^7 - 42n^6 - 47n^5 - 17n^3 - 6 = \Omega(n^7).$$

Dôkaz tohto tvrdenia vie mať veľa rôznych podôb. Uvedieme jednu z nich a uvedieme ju korektne formálne zapísanú. Ak chcete vidieť, ako na dôkaz prísť, odporúčam skôr čítať od konca.

Nech $c = \frac{1}{5}$ a $n_0 = 235$. Pre každé $n \geq 235$ platí:

$$\begin{aligned} n^7 &\geq 235n^6 \geq 210n^6, \\ n^7 &\geq 235n^6 \geq 235n^5, \\ n^7 &\geq 235n^6 \geq 85n^3, \\ n^7 &\geq 235n^6 \geq 30. \end{aligned}$$

Sčítaním týchto nerovností dostaneme

$$\begin{aligned} 4n^7 &\geq 210n^6 + 235n^5 + 85n^3 + 30, \\ 4n^7 - 210n^6 - 235n^5 - 85n^3 - 30 &\geq 0, \qquad | +n^7 \\ 5n^7 - 210n^6 - 235n^5 - 85n^3 - 30 &\geq n^7, \qquad |: 5 \\ n^7 - 42n^6 - 47n^5 - 17n^3 - 6 &\geq \tfrac{1}{5}n^7, \\ n^7 - 42n^6 - 47n^5 - 17n^3 - 6 &\geq cn^7, \end{aligned}$$

čo platí pre $c = \frac{1}{5}$ a všetky $n \geq 235$.

4. úloha

> Nech G je graf s $n \geq 4$ vrcholmi a maximálnym stupňom najviac $n-2$, ktorý spĺňa nasledovnú vlastnosť: Keď si vyberieme ľubovoľné tri rôzne vrcholy grafu G, tak jeden z nich je spojený hranou so zvyšnými dvomi.
>
> a) V závislosti od čísla n určte, aké stupne môžu mať vrcholy grafu G.
>
> b) Nájdite všetky celé čísla $n \geq 4$, pre ktoré takýto graf existuje.
>
> c) Dokážte, že každý takýto graf obsahuje kružnicu prechádzajúcu cez všetky vrcholy.

Podúloha a) Ukážeme, že všetky vrcholy môžu mať len stupeň $n-2$. Pre spor predpokladajme, že graf G obsahuje vrchol v so stupňom menším ako $n-2$ (väčší nemôže byť podla zadania). To znamená, že existujú vrcholy u a w, ktoré nie sú s vrcholom v spojené hranou. Potom však trojica u, v, w obsahuje len jednu hranu, čo porušuje podmienku zo zadania – spor. Pre úplnosť by sme mali ešte ukázať, že stupeň $n-2$ naozaj môžeme dosiahnuť – to prenecháme riešenia b).

Podúloha b) Podľa a) každý takýto graf G má stupne $n-2$. Ak je n nepárne, tak aj $n-2$ je nepárne, ale graf nemôže mať nepárny počet vrcholov nepárneho stupňa. Preto n musí byť párne.

Pre každé párne $n \geq 4$ takýto graf existuje. Uvažujme n vrcholov rozdelených do $n/2$ párov (navzájom disjunktných). Každý vrchol spojíme hranou so všetkými vrcholmi okrem jeho páru. Keď si vyberieme v takomto grafe ľubovoľné tri vrcholy, tak sme vybrali najviac jeden pár. Preto sú medzi nimi aspoň dve hrany a tie musia vychdázať a rovnakého vrchola. Takýto graf naozaj spĺňa zadania. Odpoveďou sú teda práve všetky párne $n \geq 4$.

Podúloha c) Keďže minimálny stupeň grafu G je $n-2$, tak podľa Tvrdenia 1.1 z prednášky graf G obsahuje cestu P dĺžky $n-2$. Táto cesta P má $n-1$ vrcholov. Označme jej krajné vrcholy v a w a nech u je jediný vrchol grafu G mimo P. Ak v grafe G sú hrany uv aj uw, tak pomocou nich uzavrieme cestu P na kružnicu cez všetky vrcholy.

BUNV nech teda v grafe G nemáme hranu uv. Keďže medzi tromi vrcholmi u, v, w sú tri hrany podľa zadania, tak musí ísť o hrany vu a vw. Keďže vrchol u má stupeň $n-2$, tak okrem v musí byť spojený so všetkými ostatnými vrcholmi, teda aj so susednom vrcholu w na ceste P – označme ho x. Potom máme nasledovnú kružnicu cez všetky vrcholy: z v ideme po ceste P do x, potom cez u, w a naspäť do w.