

## Sada domácich úloh z UKTG č. 3

Termín: streda 10. 5. 2023, 23:59

**Úloha 1.** (2,5 boda) V závislosti od celého čísla  $n \geq 0$  vyjadrite sumu

$$\sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \right)^2.$$

**Úloha 2.** (1 bod) Rozhodnite, či pre ľubovoľné funkcie  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  platí  $f = O(g)$  alebo  $g = O(f)$ . Vaše tvrdenie dokážte.

**Úloha 3.** (1 bod) Dokážte, že platí

$$\frac{1}{3}n^7 - 42n^6 - 47n^5 - 17n^3 - 6 = \Omega(n^7).$$

**Úloha 4.** (2,5 boda) Nech  $G$  je graf s  $n \geq 4$  vrcholmi a maximálnym stupňom najviac  $n - 2$ , ktorý spĺňa nasledovnú vlastnosť: Keď si vyberieme ľubovoľné tri rôzne vrcholy grafu  $G$ , tak jeden z nich je spojený hranou so zvyšnými dvomi.

- V závislosti od čísla  $n$  určte, aké stupne môžu mať vrcholy grafu  $G$ .
- Nájdite všetky celé čísla  $n \geq 4$ , pre ktoré takýto graf existuje.
- Dokážte, že každý takýto graf obsahuje kružnicu prechádzajúcu cez všetky vrcholy.