Cvičenie 3: Základné enumeračné pravidlá

Veta 1 (Pravidlo súčtu)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú po dvoch disjunktné konečné množiny. Nech X je ich zjednotenie,*

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n = \bigcup_{k=1}^{n} X_k.$$

Potom

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_n| = \sum_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Úloha 1. Medveď si môže dať na obed buď jednu z 50 (rozlíšiteľných) oviec alebo jedného z troch (rozlíšiteľných) valachov (nie však oboje naraz). Z koľkých možností si môže vybrať dohromady?

Úloha 2. Pod grúňom sa pasú dve čriedy o n ovciach a jedna črieda o m ovciach (všetky ovce sú navzájom rozlíšiteľné). Koľko možností má medveď, keď chce zjesť práve jednu ovcu?

Veta 2 (Pravidlo súčinu)**.** *Nech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ a $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sú ľubovoľné konečné množiny. Potom*

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n| = \prod_{k=1}^{n} |X_k|.$$

Pravidlo súčinu možno aj zovšeobecniť na silnejšiu verziu, kedy dovolíme, neformálne povedané, aby množiny, z ktorých vyberáme prvky záviseli od výberu predošlých prvkov. Dôležité je len to, aby sme zakaždým na daný prvok výslednej usporiadanej n-tice mali rovnaký počet možností. Zapísať pravidlo súčinu riadne formálne je značne komplikované, preto v jeho formulácii od tohto upustíme. Príklad jeho použitia nájdete na konci dokumentu ako riešenie úlohy 22.

Veta 3. *Nech X je konečná množina. Nech $A \subseteq X^k$, $k \geq 2$, je podmnožina karteziánskeho súčinu X^k, ktoré obsahuje všetky také usporiadané k-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ spĺňajúce podmienky:*

(1) *prvok x_1 je možné z množiny X vybrať n_1 spôsobmi;*

(2) *pre každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, po akomkoľvek výbere usporiadanej i-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_i)$ je možné prvok x_{i+1} vybrať vždy n_{i+1} spôsobmi.*

Potom $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$.

→ **Úloha 3.** K dispozícii máme cifry $2, 3, 4$. Koľko z nich vieme zložiť

a) dvojciferných čísiel,

b) trojciferných čísiel,

c) štvorciferných čísiel,

d) párnych trojciferných čísel.

Úloha 4. Háďžeme troma kockami rôznych farieb. Koľko môže padnúť rôznych trojíc čísel?

Úloha 5. Najnovší model lopaty vyrábajú v šiestich výkonnostných a v troch energetických kategóriách, pričom ku každej z výkonnostných kategórií je k dispozícii každá z energetických kategórií. Koľko variantov je na trhu celkovo?

→ **Úloha 6.** Koľko písmen má Morseova abeceda, ktorá používa symboly bodku a čiarku v jedno- až štvormiestnych skupinách, pričom každý symbol sa môže opakovať?

Úloha 7. Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel.

Úloha 8. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry a najviac päť cifier.

→ **Úloha 9.** Nájdite počet všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry.

Úloha 10. Nájdite počet všetkých čísel, ktoré majú aspoň tri cifry, najviac päť cifier a rovnaké posledné dve cifry.

→ **Úloha 11.** Nájdite počet kladných deliteľov čísla 120.

Úloha 12. Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^5 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^8$.

→ **Úloha 13.** Nájdite počet kladných deliteľov čísla $3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6$.

Úloha 14. Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

Úloha 15. Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa buď začínajú na a, alebo sa súčasne nezačínajú na a a končia na c?

→ **Úloha 16.** Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b?

Úloha 17. Koľko existuje všetkých postupností dĺžky 5 zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú každé z písmen aspoň raz?

Úloha 18. Koľko je všetkých 4-znakových slov zložených z písmen `a`, `b` `c`, `d`, ktoré obsahujú práve jedno písmeno `a`.

→ **Úloha 19.** Koľko je všetkých 4-znakových slov zložených z písmen `a`, `b` `c`, `d`, ktoré obsahujú aspoň jedno písmeno `a`.

> **Veta 4** (Pravidlo rozdielu). *Nech A, U sú ľubovoľné konečné množiny také, že $A \subseteq U$. Potom*
>
> $$|U \setminus A| = |U| - |A|.$$

Úloha 20. Dokážte pravidlo rozdielu (vetu 4).

→ **Úloha 21.** Nájdite počet 3-cirených čísel, ktoré možno zložiť z cifier 1, 2, 3, 4. Cifry nemôžeme používať opakovane.

→ **Úloha 22.** Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne.

→ **Úloha 23.** Koľko existuje 4-ciferných čísel zložených z cifier z množiny $M = \{1, 2, 3, 4\}$, v ktorých sa nenachádzajú dve rovnaké cifry bezprostredne za sebou?

→ **Úloha 24.** S pripomienkami k zákonu chce v parlamente vystúpiť 6 poslancov A, B, C, D, E, F.

a) Koľko je možných poradí vystúpení?

b) Koľko je poradí, v ktorých vystupuje A ihneď po E?

c) Koľko je poradí, v ktorých vystupuje A po E?

Veta 5 (Pravidlo mocnenia)**.** *Nech A, B sú ľubovoľné konečné množiny, $|A| = k$, $|B| = n$. Potom $|B^A| = |B|^{|A|} = n^k$.*

V kombinatorike väčšinou pracujeme s konvenciou $0^0 = 1$ – pravidlo mocnenia tak dáva zmysel aj pre $n = m = 0$, čo súhlasí so skutočnosťou, že existuje jediné zobrazenie medzi dvoma prázdnymi množinami.

Definícia 1 (Variácie s opakovaním)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné zobrazenie $f: A \to B$, čiže prvok množiny B^A.

Veta 6. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií s opakovaním k-tej triedy z n prvkov množiny B je n^k.*

Definícia 2 (Variácie bez opakovania)**.** Nech $A = \{1, \ldots, k\}$ a B je konečná množina taká, že $|B| = n$. *Variáciou bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B* nazveme ľubovoľné injektívne zobrazenie $f: A \to B$. Množinu všetkých injektívnych zobrazení z A do B označujeme I_B^A.

Veta 7. *Nech B je ľubovoľná konečná množina taká, že $|B| = n$. Nech $k \in \mathbb{N}$ je ľubovoľné. Počet variácií bez opakovania k-tej triedy z n prvkov množiny B je*

$$n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1} (n-j).$$

Úloha 25. Pod grúňom je 10 salašov a na každom majú 50 (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

Úloha 26. Pod grúňom je n salašov a na každom majú m (rozlíšiteľných) oviec. Medveď chce na každom salaši zjesť práve jednu ovcu. Koľkými spôsobmi tak môže urobiť (na poradí návštev jednotlivých salašov nezáleží).

→ **Úloha 27.** Nech $n \in \mathbb{N}$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$?

Úloha 28. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré začínajú písmenom a alebo b?

→ **Úloha 29.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa končia trojicou rovnakých písmen?

→ **Úloha 30.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú práve jeden výskyt písmena c?

Úloha 31. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel.

Úloha 32. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X?

Úloha 33. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré začínajú párnym číslom?

Úloha 34. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré začínajú nepárnym číslom?

Úloha 35. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne?

Úloha 36. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých 20-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne a súčasne začínajú párnym číslom?

Úloha 37. Nech $X = \{1, \ldots, 100\}$. Koľko je všetkých aspoň 97-prvkových postupností prvkov z množiny X, ktoré majú všetky prvky rôzne?

$\to$ **Úloha 38.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré sa nekončia trojicou rovnakých písmen?

Úloha 39. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré neobsahujú práve jeden výskyt písmena c?

$\to$ **Úloha 40.** Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Koľko existuje všetkých n-prvkových postupností zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré nobsahujú aspoň jeden výskyt písmena c?

Úloha 41. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 4.

Úloha 42. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré nie sú deliteľné číslom 5.

Úloha 43. Nech $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nájdite počet všetkých n-ciferných čísel, ktoré obsahujú aspoň jednu z cifier $\{1, 3, 7\}$.

Ako formálne riešiť kombinatorické úlohy

Základnými nástrojmi pri riešení sú pravidlo súčtu a súčinu. Ich použitie môže vyzerať napr. takto.

Rišenie úlohy 16

> Koľko existuje všetkých usporiadaných 5-tíc zložených z písmen $\{a, b, c, d\}$, ktoré obsahujú dva po sebe idúce výskyty písmena b a žiaden ďalší výskyt písmena b?

Usporiadané pätice si rozdelíme na niekoľko množín podľa toho, na ktorej pozícii sa objavujú po sebe idúce výskyty b. Pre stručnosť si označme $Z = \{a, c, d\}$.

- **1. a 2. pozícia:** množinu takýchto 5-tíc vieme vyjadriť ako $\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z$.
- **2. a 3. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z$.
- **3. a 4. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z$.
- **4. a 5. pozícia:** vtedy máme množinu $Z \times Z \times \times Z \times \{b\} \times \{b\}$.

Množinu všetkých riešení vieme tak vyjadriť ako

$$\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z \cup Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \cup Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \cup Z \times Z \times \times Z\{b\} \times \{b\}.$$

Všetky tieto štyri množiny sú navzájom disjunkté, lebo sa líšia v pozícii b-čok. Preto podľa pravidla súčtu jej veľkosť je rovná

$$|\{b\} \times \{b\} \times Z \times Z \times Z| + |Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z \times Z| + |Z \times Z \times \{b\} \times \{b\} \times Z| + |Z \times Z \times Z\{b\} \times \{b\}|.$$

To je zas podľa pravidla súčinu rovné

$$|\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| \cdot |Z| \cdot |Z| + |Z| \cdot |\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| \cdot |Z| +$$
$$+ |Z| \cdot |Z| \cdot |\{b\}| \cdot |\{b\}| \cdot |Z| + |Z| \cdot |Z| \cdot |Z| \cdot |\{b\}| \cdot |\{b\}| =$$
$$1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 4 \cdot 3^3.$$

Nie všetky kombinatorické úlohy sú však o usporiadaných n-ticiach, že ich pekne vieme dostať z pravidla súčinu – napr. keď máme počítať nejaké čísla. Hoci považovať čísla za usporiadané n-tice nie je veľká nepresnosť a sme ju ochotní tolerovať. Čisto formálne riešenie by vyzeralo takto.

Rišenie úlohy 9

> Nájdite počet všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry.

Množinu cifier si označme $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$ a množinu všetkých 5-ciferných čísel, ktoré majú rovnaké posledné dve cifry, si označme A. Zostrojme množinu

$$B = (C - \{0\}) \times C \times C \times C,$$

ktorá má podľa pravidla súčinu veľkosť $|B| = |C - \{0\}| \cdot |C| \cdot |C| \cdot |C| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$. Zostrojme zobrazenie $f\colon B \to A$, ktoré usporiadanej 4-ici (a, b, c, d) priradí číslo v dekadickom zápise $\overline{abcdd}$. Toto zobrazenie je zjavne bijekcia, preto $|A| = |B| = 9\,000$.

Naša zostrojená množina B „reprezentuje“ hľadané 5-ciferné čísla, lebo každé také číslo je jednoznačne určené usporiadanou štvoricou cifier, ktoré predstavujú cifry na prvých štyroch miestach zľava – posledná cifra je určená predposlednou. Tento fakt vieme formálne vyjadriť práve nájdením bijekcie.

Všimnime si, že z takéhoto formálneho riešenia, vieme pomerne priamočiaro zostrojiť program, ktorý nám všetky možnosti vypíše. Karteziánsky súčin vieme ľahko reprezentovať vnorenými `for` cyklami. Pre prehľadnosť si pre rozdiel množín definujeme vlastnú funkciu `difference`.

```
#include <iostream>
#include <set>

using namespace std;

set<int> difference(const set<int> &A, const set<int> &B) {
    set<int> C;
    for (int a : A) {
        if (B.count(a) == 0) {
            C.insert(a);
        }
    }
    return C;
}

void uloha_3_8() {
    set<int> C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
    int pocet = 0;
    for (int a : difference(C, {0})) {
        for (int b : C) {
            for (int c : C) {
                for (int d : C) {
                    cout << a << b << c << d << d << endl;
                    pocet++;
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet << " moznosti\n";
}

int main() {
```

```
    uloha_3_8();
    return 0;
}
```

V mnohých zložitejších úlohách nám však pravidlo súčinu stačiť nebude. Takmer vo väčšine kom-ninatorických úloh, s ktorými sa stretneme, budeme používať zovšeobecnené pravidlo súčinu. Zápis jeho použitia môže vyzerať takto.

Riešenie úlohy 22

> Nájdite počet všetkých štvorciferných čísel, ktoré majú všetky cifry navzájom rôzne.

Nech A je množina čísel zo zadania a $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$ je množina cifier. Nech B je množina usporiadaných štvoríc (a, b, c, d), kde

- $a \in C - \{0\}$, $|C - \{0\}| = 9$;
- $b \in C - \{a\}$, $|C - \{a\}| = 9$ pre každú voľbu a;
- $c \in C - \{a, b\}$, $|C - \{a, b\}| = 8$ pre každú voľbu a, b;
- $d \in C - \{a, b, c\}$, $|C - \{a, b, c\}| = 7$ pre každú voľbu a, b, c.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu $|B| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$. Zobrazenie $f\colon A \to B$, $f((a, b, c, d)) = \overline{abcd}$ je zjavne bijekcia. Preto $|A| = |B| = 4\,536$.

Na základe tohto riešenia by program vyzeral nasledovne:

```
void uloha_3_17() {
    set<int> C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
    int pocet = 0;
    for (int a : difference(C, {0})) {
        for (int b : difference(C, {a})) {
            for (int c : difference(C, {a, b})) {
                for (int d : difference(C, {a, b, c})) {
                    cout << a << b << c << d << endl;
                    pocet++;
                }
            }
        }
    }
    cout << pocet << " moznosti\n";
}
```

Tu vidíme, že pri programovaní vlastne ani nebadať rozdiel medzi bežným a zovšeobecneným pravidlom súčinu.

Minimalistický zápis, ktorý sme ešte ochotní uznať ako formálne riešenie, môže vyzerať takto.

Stručné riešenie úlohy 22

Zvoľme

- $a \in C - \{0\}$: 9 možností;
- $b \in C - \{a\}$: 9 možností;
- $c \in C - \{a, b\}$: 8 možností;
- $d \in C - \{a, b, c\}$: 7 možností.

Zostrojíme číslo $\overline{abcd}$, čím máme zjavne bijekciu. Teda počet možností je $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$.

Hlavne vám odporúčame pomenúvať si jednotlivé voľby a na základe týchto označení na záver opísať, ako dostaneme z týchto čiastkových volieb výslednú možnosť. Hoci pri takýchto jednoduchých úlohách sa takéto riešenie dá opísať aj slovne, bez písmeniek, pri zložitejších úlohách absencia premenných vie spôsobiť nejasnosti. Tiež si treba skontrolovať, že naozaj je naše zobrazenie bijekcia – to je jedna z najčastejších chýb pri riešení.

Riešenia

Riešenia úloh sú celkom provizórne. Je možné, že obsahujú nejaké chyby, preklepy. Budem rád, pokiaľ mi každú nezrovnalosť nahlásite mailom na rajnik zavinac dcs.fmph.uniba.sk.

1. 53

2. $n + m$

3.

a) $3^2 = 9$

b) $3^3 = 27$

c) $3^4 = 81$

d) $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

4. $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

5. $6 \cdot 3 = 18$

6. $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

7. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

8. $9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^4 = 99\,900$

9. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$

10. $9\,990$

11. $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

12. $6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 810$

13. $13 \cdot 7 \cdot 7$ deliteľov $(3^4 \cdot 4^5 \cdot 6^2 \cdot 7^6 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 7^6)$

14. $2 \cdot 4^4 = 512$

15. $4^4 + 3 \cdot 4^3 = 448$

16. $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = 108$

17. $4 \cdot (6 \cdot 10) = 240$

18. $4 \cdot 3^3 = 108$

19. $4^4 - 3^4 = 175$

20. Ľahko ukážeme, že platí $U = U \setminus A \cup A$ a že množiny $U \setminus A$, A sú disjunktné. Potom len použijeme pravidlo súčtu a upravíme.

21. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

22. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

23. $4 \cdot 3^4 = 324$

24. a) $6!$, b) $5!$, c) $6!/2$

25. 50^{10}

26. m^n

27. 4^n

28. $2 \cdot 4^{n-1}$

29. $4^{n-3} \cdot 4 = 4^{n-2}$

30. $n \cdot 3^{n-1}$

31. $9 \cdot 10^{n-1}$

32. 100^{20}

33. $50 \cdot 100^{19}$

34. $50 \cdot 100^{19}$

35. $100^{\underline{20}}$

36. $50 \cdot 99^{\underline{19}}$

37. $100^{\underline{97}} + 100^{\underline{98}} + 100^{\underline{99}} + 100^{\underline{100}}$

38. $4^n - 4^{n-2}$

39. $4^n - n \cdot 3^{n-1}$

40. $4^n - \cdot 3^n$

41. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-3} \cdot 25$ (pre $n \geq 3$)

42. $9 \cdot 10^{n-1} - 9 \cdot 10^{n-2} \cdot 2$ (pre $n \geq 2$)

43. $9 \cdot 10^{n-1} - 6 \cdot 7^{n-1}$