Cvičenie 13: Eulerovské grafy

Definícia 1. Súvislý graf $G = (V, E)$ je *eulerovský*, ak v ňom existuje uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany (*eulerovský ťah*).

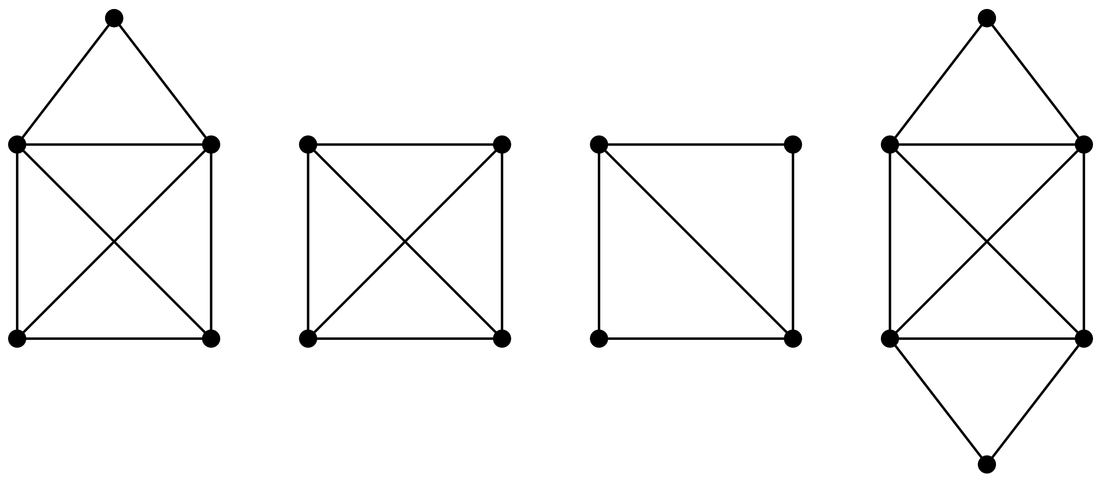
Veta 1. *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. Graf G je eulerovský práve vtedy, keď sú stupne všetkých jeho vrcholov párne.*

Veta 2. *Nech $G = (V, E)$ je súvislý graf. V grafe G existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany práve vtedy, keď v grafe G existujú práve dva vrcholy nepárneho stupňa.*

Definícia 2. Súvislý graf je *hamiltonoský*, ak v ňom existuje kružnica prechádzajúca cez všetky vrcholy.

Definícia 3. *Hranový graf* $L(G)$ grafu G je graf, ktorého vrcholmi sú hrany grafu G a dva vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď hrany, ktoré sú reprezentované vrcholmi $L(G)$, majú spoločný vrchol.

→ **Úloha 1.** Zistite, či sú nasledujúce grafy eulerovské:



→ **Úloha 2.** Zistite, či v grafoch z predchádzajúcej úlohy existuje otvorený ťah obsahujúci všetky hrany.

→ **Úloha 3.** Dokážte vetu 2.

→ **Úloha 4.** Nájdite všetky $n \geq 1$ také, že kompletný graf K_n je eulerovský.

→ **Úloha 5.** Nech $M = \{1, 2, \ldots, 17\}$. Dokážte, že existuje postupnosť prvkov množiny $\binom{M}{5}$, v ktorej sa každá dvojca navzájom disjunktných 5-prvkových podmnožín množiny M nachádza práve raz vedľa seba.

Úloha 6. Hypotéza o dvojitom pokrytí kružnicami hovorí, že pre každý graf G, ktorý neobsahuje most, existuje multimnožina kružníc $\mathcal{K}$ taká, že každá hrana grafu G sa nachádza práve v dvoch kružniciach z $\mathcal{K}$. Dokážte, že táto hypotéza platí pre eulerovské grafy. (*Most* je taká hrana grafu, ktorej odstránením sa zvýši počet komponentov.)

Úloha 7. Dokážte, alebo vyvráťte masledujúce implikácie:

1. Graf G je eulerovský $\Rightarrow$ hranový graf $L(G)$ je eulerovský.
2. Hranový graf $L(G)$ je eulerovský $\Rightarrow$ graf G je eulerovský.

Úloha 8. Dokážte, že bipartitiný hamiltonovský graf má obe partície rovnakej veľkosti.

Úloha 9. Dokážte, že ak G je hamiltonovský alebo eulerovský, tak hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský.

Riešenia