Sada domácich úloh z UKTG č. 2

Termín: **streda 10. 4. 2023, 23:59**

Úloha 1

(1,5 boda) V závislosti od prirodzeného čísla n vypočítajte sumu

$$\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k}.$$

Riešenie cez úpravy

Pre $k = 0$ a $k = 0$ nám v sume vyjde 0, teda tieto dva členy môžeme vyhodiť. Upravujme:

$$\sum_{k=0}^{n} k(n-k)\binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(n-k)\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\frac{(3n)!}{(n-k)!(2n+k)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n)!}{(k-1)!(2n-k)!}\frac{(3n)!}{(n-k-1)!(2n+k)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (2n)(3n)\frac{(2n-1)!}{(k-1)!(2n-k)!}\frac{(3n-1)!}{(n-k-1)!(2n+k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (2n)(3n)\binom{2n-1}{k-1}\binom{3n-1}{n-k-1} =$$

$$= 6n^2\sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-1}{k-1}\binom{3n-1}{n-k-1}.$$

Použijeme substitúciu $\ell = k - 1$:

$$6n^2\sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{2n-1}{\ell}\binom{3n-1}{n-2-\ell}.$$

Táto suma sa podľa Cauchyho sčítacieho vzorca rovná

$$6n^2\binom{(2n-1)+(3n-1)}{n-2} = 6n^2\binom{5n-2}{n-2}.$$

Riešenie cez počítanie dvomi spôsobmi

Uvažujme úlohu: Máme $5n$ detí, z toho $2n$ chlapcov a 32 dievčat. Koľkými spôsobmi možno z nich vytvoriť tím pozostávajúci z n detí a v rámci tímu určiť dvoch kapitánov: jedného chlapca a jedno dievča. Formálne možno túto úlohu vyjadriť napríklad takto. Máme množiny C a D také, že $|C| = 2n$, $|D| = 3n$ a $D \cap C = \emptyset$. Chceme určiť počet prvkov množiny

$$M = \left\{(T, c, d);\ T \in \binom{C \cup D}{n} \wedge c \in C \cap T \wedge d \in D \cap T\right\}.$$

1. riešenie Všetky výbery rozdelíme na množiny $M_0, M_1, \dots, M_n$, kde pre každé $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ množina M_k obsahuje výbery obsahujúce práve k chlapcov. Tieto množiny sú po dvoch disjunktné, nakoľko obsahujú možnosti s rôznym počtom chlapcov. Každý tím z množiny M_k je jednoznačne určený nasledovnými výbermi:

1. Vyberieme množinu k chlapcov T_c, na čo máme $\binom{2n}{k}$ možností.
2. Vyberieme množinu $n-k$ dievčat T_d, na čo máme $\binom{3n}{n-k}$ možností.
3. Z k vybraných chlapcov vyberieme chlapca kapitána, teda vyberieme $c \in T_C$, na čo máme k možností (pre každý výber T_c).
4. Podobne máme $n-k$ možností pre výber dievčaťa kapitána $d \in T_d$.

Takto sme dostali tím $T_c \cup T_d$ s kapitánmi c, d. Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu máme celkom

$$|M_k| = \binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k}k(n-k) \qquad \text{možností.}$$

Podľa pravidla súčtu je všetkých možností

$$\sum_{k=0}^{n} |M_k| = \sum_{k=0}^{n} k(n-k\binom{2n}{k}\binom{3n}{n-k},$$

čo sa rovná našej sume.

2. riešenie Tím vieme vybrať aj nasledovne:

1. Vyberieme kapitána chlapcov $c \in C$, na čo máme $2n$ možností.
2. Vyberieme kapitánku dievčat $d \in D$, na čo máme $3n$ možností.
3. Zo zvyšných $5n-2$ detí vyberieme zvyšných $n-2$ detí do tímu, teda $T' \in \binom{C \cup D - \{c,d\}}{n-2}$, na čo máme vždy $\binom{5n-2}{n-2}$ možností.

Týmto je jednoznačne určený tím $\{c, d\} \cup T'$ s kapitánmi c, d. Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu je takýchto tímov

$$2n \cdot 3n \cdot \binom{5n-2}{n-2} = 6n^2\binom{5n-2}{n-2}.$$

Keďže ide o riešenie rovnakej úlohy (resp. formálne o mohutnosť množiny M), tak táto hodnota je rovná sume zo zadania.

Úloha 2

(1,5 boda) Určte, koľko existuje usporiadaných 20-tíc $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$ celých čísel, ktoré spĺňajú všetky z nasledovných podmienok:

(i) $a_i \geq 2$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, 20\}$,

(ii) $a_1 \leq 4$,

(iii) $a_2 = 10$,

(iv) $a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 300$.

Nech M je množina všetkých usporiadaných 20-tíc zo zadania. Rozložme ju na množiny M_i pre $i \in \{2, 3, 4\}$, kde M_i obsahuje tie 20-tice s $a_1 = i$. Ekvivalentne upravme podmienku (iv)

$$\begin{aligned} i + 10 + a_3 + a_4 \cdots + a_{20} &= 300 \qquad \mid -i - 10 - 18 \cdot 2, \\ a_3 - 2 + a_4 - 2 + \cdots + a_{20} - 2 &= 300 - i - 46 \end{aligned}$$

a použime substitúciu $b_i = a_i - 2$ pre $i \in \{2, 3, \dots, 18\}$, pričom máme $b_i \geq 2 - 2 = 0$, teda $b_i \in \mathbb{N}$

$$b_3 + b_4 + \cdots + b_{20} = 254 - i. \tag{1}$$

Vďaka ekvivalentným úpravám je počet možností v množine M_i rovný počtu riešení rovnice (1) v obore $\mathbb{N}$. Ten určíme nasledovne. Uvažujeme postupnosti obsahujúce $254-i$ symbolov `0` a 17 symbolov `I`. Takýchto postupností je $\binom{254-i+17}{17} = \binom{271-i}{17}$. Každá takáto postupnosť je rozdelená 17-timi znakmi `I` na 18 úsekov. Ak označíme počty znakov `0` v týchto úsekoch postupne ako $b_3, b_4, \dots, b_{20}$, tak dostaneme bijekciu medzi riešeniami rovnice (1) a uvažovanými postupnosťami. Preto riešení rovnice (1), a teda aj počet možností v množine M_i je $\binom{271-i}{17}$. Na záver podľa pravidla súčtu máme

$$|M| = |M_2| + |M_3| + |M_4| = \binom{269}{17} + \binom{268}{17} + \binom{267}{17}.$$

Počet možností v M_i cez kombinácie s opakovaním Počet riešení rovnice (1) vieme určiť aj cez kombinácie s opakovaním. Z 18-prvkovej množiny $\{3, 4, \dots, 20\}$ vytvoríme $(254 - i)$-prvkovú multimnožinu. Počet výskytov čísla i bude určovať hodnotu b_i. Podľa vety o počte kombinácií s opakovaním je takýchto multimnožín

$$\binom{254 - i + 18 - 1}{254 - i} = \binom{271 - i}{254 - i} = \binom{271 - i}{17}.$$

Úloha 3

(4 body) V tejto úlohe budeme pracovať s kartičkami inšpirovanými hrou Dobble. Na každej karte sa nachádza 8 symbolov z celkových možných 57 symbolov. Symboly budeme reprezentovať prirodzenými číslami.

Nech teda $Z = \{1, 2, \dots, 57\}$ je množina symbolov. *Dobble kartička*, alebo skrátene len *kartička*, je ľubovoľná 8-prvková podmnožina množiny Z. Určte, koľko je

a) *(0,2 boda)* všetkých možných kartičiek (upozorňujeme, že podľa našej definície je možných kartičiek výrazne viac ako kartičiek použitých v jednej sade);

b) *(0,8 boda)* usporiadaných dvojíc kartičiek, ktoré nemajú žiaden spoločný symbol (napr. $(\{2, 5, 9, 17, 42, 47, 50, 52\}, \{7, 12, 24, 30, 31, 37, 49, 55\})$);

c) *(1,5 bod)* 4-prvkových množín kartičiek, ktorých zjednotenie tvorí 32 za sebou idúcich čísel (napr. $\{\{14, 20, 22, 25, 27, 31, 34, 36\}, \{8, 9, 13, 15, 30, 32, 35, 37\}, \{10, 12, 16, 18, 19, 21, 24, 28\}, \{7, 11, 17, 23, 26, 29, 33, 38\}\}$)

d) *(1,5 boda)* 3-prvkových množín kartičiek, kde každé dve kartičky majú práve jeden spoločný symbol (nie nutne ten istý);

Vaše výsledky dokážte.

Bonus. *(1 bod)* Hra Dobble sa však nehrá len tak s hocijakou sadou kartičiek. *Dobble sada* je množina kartičiek taká, že každé dve rôzne kartičky majú práve jeden spoločný symbol a zároveň neexistuje symbol, ktorý by bol na všetkých kartičkách (ak by taký existoval, tak hra ani táto úloha by neboli zaujímavé). Koľko najviac kartičiek môže obsahovať nejaká Dobble sada? Vaše tvrdenie dokážte.

Pri dôkaze môžete použiť aj počítač, vtedy odovzdajte použité programy. Ako pomôcku uvádzame, že v hre Dobble je 55 kartičiek, ktoré nájdete v súbore `http://www.dcs.fmph.uniba.sk/~rajnik/uktg/du/dobble.txt` (každý riadok je jedna kartička, kde sú jej symboly oddelené medzerami). Väčšina bodov bude udeľovaná za horný odhad počtu kartičiek. Tak aj keď neviete nájsť príklad optimálnej sady, nemusíte zúfať.

Podúloha a)

Kartičiek je toľko, koľko je 8-prvkových podmnožín množiny Z, čo je $\binom{57}{8}$.

Podúloha b)

Chceme počet dvojíc (A, B), kde

1. Prvá kartička A je ľubovoľná 8-prvková podmnožina Z: $\binom{57}{8}$ možností
2. Druhá kartička B je ľubovoľná 8-prvková podmnožina $Z - A$: vždy $\binom{57-8}{8} = \binom{49}{8}$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu platí, že takýchto dvojíc je

$$\binom{57}{8}\binom{49}{8}.$$

Podúloha c)

Vyberme:

1. Číslo $a \in \{1, 2, \ldots, 26\}$: 26 možností.
   Označme si $S_a = \{a, a+1, \ldots, a+31\}$ (týmto sme určili, ktorých 32 za sebou idúcich čísel z vybranej štvorice dostaneme).

2. 8-prvkovú množinu $A \subseteq S_a$: vždy $\binom{32}{8}$ možností.
3. 8-prvkovú množinu $B \subseteq S_a - A$: vždy $\binom{24}{8}$ možností.
4. 8-prvkovú množinu $C \subseteq S_a - A - B$: vždy $\binom{16}{8}$ možností.
5. 8-prvkovú množinu $D \subseteq S_a - A - B - C$: vždy $\binom{8}{8} = 1$ možnosť.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu počet takýchto pätíc (a, A, B, C, D) je

$$26\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}.$$

Uvažujme zobrazenie, ktoré päticu (a, A, B, C, D) zobrazí na 4-prvkovú množinu $\{A, B, C, D\}$. Toto zobrazenie je 1-na-24, lebo na hodnota a je určená množinami A, B, C, D a na poradí A, B, C, D nezáleží. Každé z ich $4! = 24$ poradí vedie k tej istej množine $\{A, B, C, D\}$. Teda podľa pravidla delenia je všetkých možností

$$\frac{26}{24}\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}.$$

Podúloha d)

Uvažujme takúto trojicu kartičiek $\{A, B, C\}$ a označme si ako a spoločný symbol kartičiek B a C, b pre kartičky C a A, a pre kartičky B a C. Ak $a = b$, tak každá z kartičiek má symbol a, teda aj $c = a$. Všetky možnosti si teda rozdelíme na také, kde spoločný symbol trojice je rovnaký, alebo ide o tri rôzne symboly.

Rovnaký spoločný symbol Uvažujme najprv trojice (3-prvkové množiny), kde každé dve kartičky majú ten istý spoločný symbol. Vyberme:

1. Tento spoločný symbol $a \in Z$: 57 možností.
2. 7-prvkovú množinu $A \subseteq Z - \{a\}$: $\binom{56}{7}$ možností.
3. 7-prvkovú množinu $B \subseteq Z - \{a\} - A$: $\binom{49}{7}$ možností.
4. 7-prvkovú množinu $C \subseteq Z - \{a\} - A - B$: $\binom{42}{7}$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu počet takýchto štvoríc (a, A, B, C) je

$$57\binom{56}{7}\binom{49}{7}\binom{42}{7}.$$

Každú z nich zobrazíme na $\{\{a\} \cup A, \{a\} \cup B, \{a\} \cup C\}$, čím dostaneme 1-na-6 zobrazenie, nakoľko každá z $3! = 6$ permutácií množín A, B, C vedie k rovnakej možnosti. Podľa pravidla delenia teda počet takýchto možností je

$$\frac{57}{6}\binom{56}{7}\binom{49}{7}\binom{42}{7} = \frac{29}{2}\binom{56}{7}\binom{49}{7}\binom{42}{7}.$$

Rôzne spoločné symboly . Uvažujme teraz trojice, kde spoločné symboly dvojíc sú navzájom rôzne. Vyberme

1. 3-prvkovú množinu symbolov $\{a, b, c\} \subseteq Z$, pričom ich označíme tak, aby platilo $a < b < c$: $\binom{57}{3}$ možností.
2. 6-prvkovú množinu $A \subseteq Z - \{a, b, c\}$: $\binom{54}{6}$ možností.
3. 6-prvkovú množinu $B \subseteq Z - \{a, b, c\} - A$: $\binom{48}{6}$ možností.
4. 6-prvkovú množinu $C \subseteq Z - \{a, b, c\} - A - B$: $\binom{42}{6}$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu počet štvoríc $(\{a, b, c\}, A, B, C)$ je

$$\binom{57}{3}\binom{54}{6}\binom{48}{6}\binom{42}{6}.$$

Uvažujme zobrazenie f, ktoré zobrazí tieto štvorice na $\{\{a, b\} \cup C, \{b, c\} \cup A, \{c, a\} \cup B\}$. Zostrojme teraz zobrazenie g opačným smerom, ktoré vezme vyhovujúcu trojicu $\{D, E, F\}$ a spraví:

1. Nech a je spoločný symbol E a F, b pre F a D, c pre D a E.
2. Nech $A = D - \{b, c\}$, $B = E - \{c, a\}$, $C = F - \{a, b\}$.
3. Ako výsledok $g(\{D, E, F\})$ položíme $(\{a, b, c\}, A, B, C)$.

Rozmyslíme si, že $f \circ g$ aj $g \circ f$ sú identity, teda f je bijeckia. Preto počet možností v tomto prípade je

$$\binom{57}{3}\binom{54}{6}\binom{48}{6}\binom{42}{6}.$$

Výsledok Na záver už len cez pravidlo súčtu určíme celkový počet hľadaných 3-prvkových množín ako

$$\frac{57}{3}\binom{56}{7}\binom{49}{7}\binom{42}{7} = 29\binom{56}{7}\binom{49}{7}\binom{42}{7} + \binom{57}{3}\binom{54}{6}\binom{48}{6}\binom{42}{6}.$$

Iné riešenie pre spoločné symboly Len stručne naznačíme, že jednoduchšie vie byť počítať najprv usporiadané trojice kartičiek. Vyberieme:

1. $a \in Z$: 57 možností;
2. $a \in Z - \{a\}$: 56 možností;
3. $a \in Z - \{a, b\}$: 55 možností;
4. 6-prvkovú množinu $A \subseteq Z - \{a, b, c\}$: $\binom{54}{6}$ možností.
5. 6-prvkovú množinu $B \subseteq Z - \{a, b, c\} - A$: $\binom{48}{6}$ možností.
6. 6-prvkovú množinu $C \subseteq Z - \{a, b, c\} - A - B$: $\binom{42}{6}$ možností.

Podľa zovšeobecneného pravidla súčinu počet výberov (a, b, c, A, B, C) je

$$57 \cdot 56 \cdot 55 \cdot \binom{54}{6}\binom{48}{6}\binom{42}{6}.$$

Tieto výbery bijektívne zobrazíme na usporiadané trojice kartičiek $(\{a,b\} \cup C, \{b,c\} \cup A, \{c,a\} \cup B)$ a takúto trojicu (D, E, F) zobrazíme 1-na-(3!) zobrazením na množinu $\{D, E, F\}$, ktorých podľa pravidla delenia je

$$\frac{57 \cdot 56 \cdot 55}{3!} \cdot \binom{54}{6}\binom{48}{6}\binom{42}{6}.$$

Bonus

Uvažujme nejakú neprázdnu Dobble sadu kartičiek $\mathcal{D}$. Zvoľme si kartičku $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_7\} \in \mathcal{D}$. Pre $i \in \{0, 1, \ldots, 7\}$ definujme množinu M_i, ktorá bude obsahovať kartičky rôzne od A, ktoré majú symbol a_i. Keďže každá zo zvyšných kartičiek má s kartičkou a spoločný práve jeden symbol, tak sa nachádza v práve jednej množine M_i, teda tieto množiny tvoria rozklad množiny kartičiek rôznych od A.

Koľko najviac kartičiek môže obsahovať množina M_i? Každá z týchto $k = |M_i|$ kartičiek má okrem symbolu a_i ešte 7 ďalších symbolov. Navyše, medzi dvomi kartičkami sú tieto symboly disjunktné, lebo už majú spoločný symbol a_i. Preto majú spolu $7k$ symbolov. Tieto symboly nemôžu byť na kartičke A, lebo s ňou už majú spoločný symbol a_i. K dispozícii máme teda $|Z - A| = 57 - 8 = 49$ symbolov. Teda $7k \leq 49$ a $k = |M_i| \leq 7$.

Na záver už len z pravidla súčinu máme

$$|\mathcal{D}| = |\{A\} \cup M_0 \cup M_1 \cup \cdots \cup M_7| = 1 + |M_0| + |M_1| + \cdots + |M_7| \leq 1 + 8 \cdot 7 = 57.$$

Teda každá Dobble sada kartičiek obsahuje najviac 57 kartičiek.

Dolný odhad Ľahko sa dá všimnúť, že do poskytnutej Dobble kartičiek sa dajú doplniť kartičky $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a $\{1, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ (napr. tak, že číslo 1 je len na 6 kartičkách, čísla 2 až 15 na 7 kartičkách, pričom ostatné čísla sú na 8 kartičkách). Správnosť sa dá spraviť aj ručne overím $55 + 56$ dvojíc kartičiek alebo pomocou programu.

Konštrukcia Dobble sady kartičiek Ako však možno nájsť takúto sadu kartičiek? Nejaké prvky konštrukcie môžeme odsledovať z dôkazu horného odhadu, keďže ho musíme dosiahnuť. Pre lepšiu názornosť budeme používať symboly $Z = \{0, 1, \ldots, 56\}$ (to je aj praktickejšie pri programovaní, kde tieto čísla môžu reprezentovať indexy do poľa, v ktorom máme uložené želené symboly). Začneme s kartičkou $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Potom pokračujme s kartičkami, ktoré obsahujú symbol 7:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\},\\
A_1 &= \{7, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\},\\
A_2 &= \{7, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\},\\
A_3 &= \{7, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\},\\
A_4 &= \{7, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42\},\\
A_5 &= \{7, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49\},\\
A_6 &= \{7, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56\},
\end{aligned}$$

(Dokonca môžeme povedať, že tento začiatok je bez ujmy na všeobecnosti – v každej úplnej sade vieme prečíslovať symboly, aby sme dostali práve tieto kartičky.) Teraz prichádza tá ťažšia časť –

určiť zvyšné kartičky. Vieme však, že tie majú vyzerať nejako takto

M_7	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
A_0	$\{0,???\}$	$\{1,???\}$	$\{2,???\}$	$\{3,???\}$	$\{4,???\}$	$\{5,???\}$	$\{6,???\}$
A_1	$\{0,???\}$	$\{1,???\}$	$\{2,???\}$	$\{3,???\}$	$\{4,???\}$	$\{5,???\}$	$\{6,???\}$
A_2	$\{0,???\}$	$\{1,???\}$	$\{2,???\}$	$\{3,???\}$	$\{4,???\}$	$\{5,???\}$	$\{6,???\}$
A_3	$\{0,???\}$	$\{1,???\}$	$\{2,???\}$	$\{3,???\}$	$\{4,???\}$	$\{5,???\}$	$\{6,???\}$
A_4	$\{0,???\}$	$\{1,???\}$	$\{2,???\}$	$\{3,???\}$	$\{4,???\}$	$\{5,???\}$	$\{6,???\}$
A_5	$\{0,???\}$	$\{1,???\}$	$\{2,???\}$	$\{3,???\}$	$\{4,???\}$	$\{5,???\}$	$\{6,???\}$
A_6	$\{0,???\}$	$\{1,???\}$	$\{2,???\}$	$\{3,???\}$	$\{4,???\}$	$\{5,???\}$	$\{6,???\}$

Čo napísať miesto otáznikov? Nemôžu tam byť čísla $0,1,2,3,4,5,6,7$, lebo s tuto kartičkou už spoločný symbol máme (v množine M_i je to i). Musí ísť teda o čísla $8,9,\ldots,56$, ktoré sa nachádzajú na kartičkách $A_0, A_1, \ldots, A_6$. Pre prehľadnosť využijeme, že tieto čísla máme usporiadané do tabuľky, keď máme kartičky $A_0, A_1, \ldots, A_6$ zapísané pod sebou. Každé z týchto čísel nahradíme usporiadanou dvojicou (r,s), kde r značí jeho riadok (teda výskyt na kartičke A_r) a s jeho stĺpec (teda poradie v rámci kartičky A_r). Obe tieto čísla berieme z množiny $\mathbb{Z}_7 = \{0,1,\ldots,6\}$. Teda pre každé $r \in \mathbb{Z}_7$ platí

$$A_r = \{1, (r,0), (r,1), \ldots, (r,6)\}$$

a napr. $(0,0) = 9$ či $(4,5) = 42$.

Teraz postupne prejeme všetkými kartičkami a určíme im zvyšné symboly. Keď spracovávame r-tú kartičku v množine M_s pre $r,s \in \mathbb{Z}_7$, tak potrebujeme určiť jej symboly. Bez ujmy na všeobecnosti, pre $k \in \mathbb{Z}_7$ bude k-ty symbol z množiny A_k, teda to bude prvok tvaru (k,ℓ) pre nejaké vhodné $\ell \in \mathbb{Z}_7$. Kľúčové bude určiť toto ℓ. Keď sa pozrieme na to, v akej fáze určovania sme, tak chceme vlastne, aby ℓ bolo určené z hodnôt $i,j,k \in \mathbb{Z}_7$. A chceme ho určiť tak, aby sme z našej tabuľky vybrali z každého riadku práve jedno políčko, teda $\ell = r$.

To vieme dosiahnuť napr. tak, že každej kartičke z M_0 dáme celý stĺpec tabuľky. Nultej kartičke z M_1 vieme dať hlavnú diagonálu. Uvedomme si, že tú konštruujeme tak, že začneme na políčku $(0,0)$ a pri posunutí o 1 riadok nižšie sa posunieme aj o 1 stĺpec vpravo. Pre k-tu kartičku tak vieme robiť to isté, len začneme na políčku $(0,k)$ (a zo stĺpca 6 sa posunieme do stĺpca 0, lebo $6+1=0$ v poli $\mathbb{Z}_7$). Teda teraz vieme vyjadriť, že $\ell = r + k$.

Pre kartičky v M_2 vieme robiť tiež podobnnú vec, len s každým riadkom sa budeme posúvať o 2 políčka doprava. Teda $\ell = r + 2k$. Teraz už by sme mohli vidieť všeobecný vzor, teda že volíme $\ell = r + sk$.

Tak sme sa dostali k tomu, že k-ty symbol na r-tej kartičke v množine M_s bude

$$(k, r + sk).$$

Tu je kľúčové uvedomiť si, že 7 je prvočíslo a tie majú pekné vlastnosti ohľadom deliteľnosti a práci zo zvyškami. Algebraicky povedané, $\mathbb{Z}_7$ s operáciami sčítavania a násobenia zvyškov tvorí pole. Tieto operácie budeme označovať bežným $+$ a $\cdot$.

Teraz dokážeme správnosť našej konštrukcie. Ľahko overíme, že dvojice kartičiek $A, A_0, A_1, \ldots, A_6$ vyhovujú a takisto aj dvojice tvorené jednou takouto kartičkou a jednou kartičkou z nejakej množiny M_s. Ostáva teda skontrolovať dvojice kartičiek v rámci množín $M_0, M_1, \ldots, M_6$. Vezmime si teda $r_1, s_1, r_2, s_2 \in \mathbb{Z}_7$ také, že $(r_1, r_2) \neq (s_1, s_2)$, a spočítajme, v koľkých symboloch sa zhoduje r_1-ta kartička z množiny M_{s_1} – označme ju K_1 – s r_2-tou kartičkou z množiny M_{s_2} – označme ju K_2. Zhodovať sa môžu buď v symboloch, ktoré nie sú z tabuľky (teda nie sú usporiadanou dvojicou), čo sa stane práve vtedy, keď $s_1 = s_2$. Alebo sa môžu zhodovať na prvkoch z tabuľky. V tom prípade musí ísť v oboch prípadoch o k-ty prvok, lebo práve tie sa zhodujú v prvej súradnici. Chceme teda spočítať počet čísel $k \in \mathbb{Z}_7$, pre ktoré platí

$$(k, r_1 + s_1 k) = (k, r_2 + s_2 k),$$

čo je ekvivalentné postupne s

$$r_1 + s_1 k = r_2 s_2 k,$$
$$(s_1 - s_2)k = r_2 - r_1.$$

V premennej k sme tak dostali lineárnu rovnicu. Ak $s_1 = s_2$, tak potom musí platiť $r_2 - r_1 \neq 0$ a rovnica nemá riešenie. Jediný spoločný symbol je vtedy $s_1 = s_2$. V opačnom prípade je $s_1 - s_2 \neq 0$ a rovnica má nad poľom $\mathbb{Z}_7$ jediné riešenie $k = (r_2 - r_1)(s_1 - s_2)^{-1}$. Čiže aj v prípade $s_1 \neq s_2$ sme dostali jediný spoločný symbol.

Geometrická predstava Táto konštrukcia sa dá aj celkom pekne predstaviť geometricky. Našu tabuľku, teda množinu $\mathbb{Z}_7 \times Z_7$ si môžeme predstaviť ako 49 bodov. Keď body dávame na kartičky tak, že z každého riadku vezmeme jeden bod, tak vlastne spájame tieto body do priamok. A chceme, aby sa každé dve priamky pretínali priamo v bode. A naozaj, také body, kde sa číslo stĺpcu zvyšuje o 3, teda body $(0, 4), (1, 0), (2, 3), (3, 6), (4, 2), (5, 5), (6, 1)$, môžeme opísať rovnicou $y = 4 + 3x$. Avšak čo s rovnobežnými priamkami? Tie pretneme v nekonečne, presnejšie rovnobežky v jednom smere pretneme v ich vlastnom nekonečne. Pre každý zo smerov teda pridáme do našej roviny nový prvok, ktorý pridáme na všetky priamky príslušného smeru. Takto dostaneme 8 nových bodov: 7 bodov pre smernice $0, 1, \ldots, 6$ a jeden bod pre priamky rovnobežné s osou y (teda priamky bez smernice tvary $x = c$ pre nejakú konštantu $c \in \mathbb{Z}_7$). Ešte na záver pridáme novú priamku tvorenú pridanými bodmi v nekonečne.

Síce tu hovoríme o nekonečne, ale to ide len o názov. Po formálnej stránke je to prvok ako každý iný – v našej konštrukcii vyššie tieto „nekonečná“ boli čísla $0, 1, \ldots, 7$ a priamka prechádzajúca nimi bola množina A, s ktorou sme začali.

Takáto štruktúra priamok a bodov (formálne ide iba o množiny nejakých prvkov) sa nazýva projektívna rovina. V našom prípade ide o konečnú projektívnu rovinu. Projektívne roviny odvodené podobným spôsobom od bežnej roviny majú uplatnenie v umení – napr. znázornenie koľajníc na obraze, ktoré nie sú zakreslené ako rovnobežné, ale zbiehajúce sa. O konečných projektívnych rovinách sa viac môžete dozvedieť na predmete Kombinatorické štruktúry.

Zovšeobecnenia Ľahko si môžete premyslieť, že táto konštrukcia sa dá priamočiaro zovšeobecniť pre iné prvočísla. A rovnako vie fungovať v akomkoľvek konečnom poli. Na to je však potrebné také polia poznať – o nich sa môžete dozvedieť na predmete Algebra (3).