

Sada domácich úloh z UKTG č. 3

Termín: **nedeľa 19. 5. 2023, 23:59**

Úloha 1. (2 body) Pod n -znakovým slovom myslíme ľubovoľnú n -prvkovú postupnosť pozostávajúcu z malých písmen anglickej abecedy (tá má 26 písmen). Koľko existuje n -znakových slov, ktoré obsahujú nejaké písmeno práve dvakrát? Vaše tvrdenie zdôvodnite.

Úloha 2. (2 body) O nasledujúcich tvrdeniach rozhodnite, či sú pravdivé:

a) $\binom{2n}{n} = O(2^n)$

b) $\binom{2n}{n} = \Omega(2^n)$

c) $\binom{2n}{n} = \Omega\left(\frac{4^n}{n}\right)$

Vaše tvrdenia dokážte.

Úloha 3. (1 bod) Nech G je graf, ktorého množina vrcholov V je množina všetkých 10-prvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, 30\}$. Vrcholy $A, B \in V$ sú spojené hranou práve vtedy, keď $A \cap B = \emptyset$. Rozhodnite a následne dokážte, či je graf G eulerovský.

Úloha 4. (2 body) Nech G je graf, ktorý má každý vrchol stupňa aspoň 3. Dokážte, že graf G obsahuje kružnicu párnej dĺžky. Musí graf G nutne obsahovať aj kružnicu nepárnej dĺžky?

Bonus. (1 bod) Napíšte program, ktorý načíta graf G a vypíše jednu jeho kružnicu párnej dĺžky.

- Formát vstupu: v prvom riadku sú medzerou oddelené čísla n a m , kde n počet vrcholov, číslovaných od 0 po $n - 1$, a m je počet hrán. V každom z m zvyšných riadkov vstupu sú dve medzerou oddelené čísla vrcholov, ktoré sú spojené hranou v grafe G . Je zaručené, že každý vrchol grafu má stupeň aspoň 3.
- Formát výstupu: vypíšte jeden riadok obsahujúci postupnosť medzerou oddelených čísel, ktorá predstavuje nájdenú kružnicu.
- Hodnotenie: V prvom rade musí byť program funkčný a správny. Pre plný počet bodov by váš program mal vedieť efektívne vyriešiť ľubovoľný vstup, kde $n, m \leq 10^7$. Väčšinu bodov možno získať aj za to, keď váš program bude korešpondovať s matematickým riešením úlohy.

Program odovzdajte v samostatnom súbore.

| Vstup: | Výstup: |
|--|-------------|
| 10 15 0 1 1 2 2 3 3 4 4 0 5 7 7 9 9 6 6 8 8 5 0 5 1 6 2 7 3 8 4 9 | 0 1 2 3 8 5 |