

Kombinatorická analýza (1) - cvičenie 4

1. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{k+1} \cdot \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$$

2. Dokážte, že postupnosť $\{a_k\}_{k \geq 1} = 1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots$ je explicitne daná vzťahom $a_n = \lfloor \sqrt{2n} + \frac{1}{2} \rfloor$.

3. Určte, pre ktoré $n \in \mathbb{N}_0$ neplatí: $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor$.

4. Riešte rovnicu ($x \in \mathbb{R}$): $\lfloor x \rfloor^2 = \lceil x \rceil^2$.

5. Riešte rovnicu ($x \in \mathbb{R}$): $\lceil \frac{1}{2} \lceil x \rceil \rceil = \lfloor x \rfloor$.

6. Dokážte: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$

7. Zistite, pre ktoré $x \geq 3$ je $\lceil \log_3(x-1) \rceil \neq \lceil \log_3 \lfloor x \rfloor \rceil$.

8. Charakterizujte dvojice $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$, pre ktoré platí: $\lfloor x + \frac{2}{3} \rfloor + \lfloor y + \frac{1}{3} \rfloor + \lfloor x+y \rfloor > 3 \cdot \lfloor x+y + \frac{1}{3} \rfloor$.

9. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=1}^n \lfloor \lg k \rfloor$$

10. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=0}^{3n+2} \left\lfloor \frac{k+1}{3} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor$$

11. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=1}^n \lceil \lg \sqrt{4k} \rceil$$

12. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=1}^{2nm} k^2 \cdot (-1)^{\lfloor k/m \rfloor}, \quad \text{int } n \geq 1, m \geq 2$$