

## Kombinatorická analýza (1) - cvičenie 5

1. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \frac{k!}{(n+1+k)!} \quad \text{int } n \geq 0$$

*Hint:* faktoriálne vyjadrenie, súčet polovice riadku Pascalovho trojuholníka

2. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k \leq n} \binom{n}{k} 2^{k-n} \quad \text{int } n$$

*Hint:* úprava na binomickú vetu

3. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{n \leq k} \binom{k}{n} 2^{n-k} \quad \text{int } n$$

*Hint:*  $n < 0$  zvlášť;  $n \geq 0$ : substitúcia  $l = k - n$ , symetria, negácia horného indexu, binomická veta

4. Vypočítajte sumu:

$$\sum_k \binom{-1/2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot k$$

*Hint:* dva rôzne postupy: (1) absorbcia  $k$ , binomická veta; (2) derivácia binomickej vety

5. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{l \geq 2} (-1)^l \binom{\lfloor e^m \rfloor}{m-l} \quad \text{int } m$$

*Hint:* substitúcia  $k = m - l$ , negácia horného indexu, paralelná sumácia

6. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+2} \quad \text{int } n \geq 0$$

*Hint:*  $2 \times$  absorbcia, rozdelenie sumy na dve, každá zrátaná samostatne

7. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cdot k^2 \quad \text{int } n \geq 0$$

*Hint:* absorbcia, rozdelenie sumy na dve (každá sa ponáša na binomickú vetu), takmer všade 0 až na okrajové prípady

8. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{n+1}{m}\right)^k (-1)^{n+k} \quad \text{int } n, m \geq 0$$

*Hint:* zlomok si označme  $a$ , úprava na takmer binomickú vetu (niečo chýba)

9. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{n+1}{k} \cdot \binom{n+1}{2k-1} \quad \text{int } n \geq 1$$

*Hint:* absorbcia, adičná formula, súčet takmer celého riadku Pascalovho trojuholníka

10. Vypočítajte sumu:

$$\sum_k \binom{n}{2n-k} \binom{-n+k}{k-2n+p} \binom{k-3p}{2m+k} (-1)^k \quad \text{int } p, \text{ int } m \geq n \geq 0$$

*Hint:* binomial revision pre prvé dva binomické koeficienty (ale spätným smerom), negácia horného indexu pre tretí koeficient, Vandermondova konvolúcia