

Kombinatorická analýza (1) - cvičenie 6 (príklad midterm písomky)

1. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=1}^n \lfloor \lg k \rfloor \cdot \lceil \lg k \rceil, \quad \text{int } n \geq 1$$

Hint: rozdeliť sumačný interval na kratšie $(2^l, 2^l + 1, \dots, 2^{l+1} - 1)$ a sumovať po intervaloch (vypadnú z toho dve jednoduchšie sumy), nezabudnúť na posledný neúplný interval

2. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k=1}^n \frac{4k^2 + 1}{k(2k + 1)^2}, \quad \text{int } n \geq 1$$

Hint: rozklad na parciálne zlomky, vedie to k výsledku s harmonickými číslami prvého a druhého rádu

3. Vypočítajte sumu:

$$\sum_k \binom{2n}{k} \binom{k}{k-n}, \quad \text{int } n \geq 0$$

Hint: stačí sumovať pre $k \geq 0$, symetria, binomial revision, binomická veta (resp. súčet riadku Pascalovho trojuholníka)

4. Vypočítajte sumu:

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n^2}{n-k} \cdot (-1)^k, \quad \text{int } n$$

Hint: variácia bola na cvičeniach, substitúcia, negácia horného indexu, paralelná sumácia

5. Riešte rekurenciu:

$$\begin{aligned} g_0 &= -1 \\ (n+1)g_n &= (n-1)g_{n-1} + H_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Hint: metóda sumačných faktorov, výpočet sumy cez konečný kalkul (sumuje sa kH_k)